بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية السودان

وزارة التربية والتعليم

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

المرحـــلة المتوسطة

الريـاضيات

الصف الثاني

أعدته بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي لجنة من الأساتذة:

د . الخطيب الطيب سيد أحمد حمدتوده - المنـــــاهج بخت الرضا

د . عبد المنعم محمود عبده عز الدين - الاشراف التربوي - ولاية الخرطوم

د . خالد محمد خالد يوسف - جـــــــــــامعة بخت الرضا

أ . الطيب سيد أحمد حمدتوده الربيع - جامعة وادي النيل ســـــابقاً

الإشراف العام

د . معاوية السر علي قشي – المدير العام

أ . حبيب آدم حبيب أحمدية – نائب المدير

أ . الباقر رحمة البشير – الأمين العام

أ . أحمد حمد النيل حسب الله – مدير إدارة المناهج الأكاديمية

التحكيم الخارجي :

د . عادل أحمد حسن كبه – جامعة وادي النيل

د . صالح يوسف محمد صالح – جامعة بخت الرضا

الجمع بالحاسوب :

حافظ محمد إبراهيم محمد – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

التصميم والإخراج الفني :

د . الرفاعي عبدالله عبدالمهيل مرحوم – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الطبعة الأولى ٢٠٢٢م

الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين .

وبعد :

نقدم لكم أعزاءنا المعلمين والمعلمات وأولياء الأمور وتلاميذنا وتلميذاتنا النجباء كتاب الرياضيات للصف الثاني من مرحلة التعليم المتوسط وفقاً لرؤية المؤتمر القومي للتعليم ٢٠٢٠م لتطوير مناهج التعليم وفق مدخل المعايير للمواد المنفصلة ، آخذين في الاعتبار توجهات التطورات المعرفية والتكنولوجية المتسارعة في جميع مجالات الحياة . وقد جاء المقرر إمتداداً لمقرر الصف الأول متوسط وذلك وفقاً لما ورد في وثيقة مصفوفة المدى والتتابع للمناهج الجديدة .

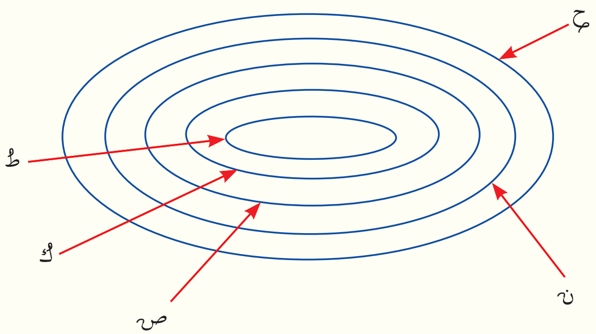
ونرجو من تلاميذنا وتلميذاتنا أن يحافظوا على هذا الكتاب ليستفيد منه من يجيء بعدهم . وأخيراً نسأل الله لكم التوفيق وأن يعينكم على تقديمه بالصورة التي تفيد التلميذ . ونحن في انتظار نقدكم البنّاء لمحتواه مشاركة منكم في تطويره وتجويده .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

١ مجموعة الأعداد الحقيقية



(١ – ١) مجموعة الأعداد النسبية العشرية

درسنا سابقاً الأعداد النسبية وهي التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ ، هنالك نوع خاص من الأعداد النسبية وهي الأعداد النسبية العشرية سوف نتناولها في هذا الدرس .

نشاط (١) :

● حوّل الأعداد النسبية الآتية إلى أعداد في صورة كسور عشرية بقسمة البسط على المقام مباشرة :

أ/ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١٣}{١٠}$ ، $\frac{٤٧}{١٦}$ ، $\frac{٣٩}{١٠٠}$ ، $\frac{١٢٢}{١٢٥}$ ، $\frac{٢٢٣}{١٠٠٠}$

ب/ $\frac{٦٣}{١٨}$ ، $\frac{٣٠}{٩٦}$ ، $\frac{٤٢}{٧٥}$ ، $\frac{٨٤}{١٠٥}$ ، $\frac{٣٤}{٤٠}$

١ . هل كان حاصل القسمة منتهياً في كل ما سبق؟

٢ . ماذا تلاحظ في مقامات الأعداد النسبية في (أ)؟

٣ . في (ب) اختصر لأبسط صورة . ما عوامل كل مقام؟

$$\frac{٦٣}{١٨} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$$

$$\frac{٤٢}{٧٥} = \frac{١٤}{٢٥} = \frac{١٤}{٥^{٢}} = ٠,٥٦$$

$$\frac{٣٠}{٩٦} = \frac{٥}{١٦} = \frac{٥}{٢^{٤}} = ٠,٣١٢٥$$

$$\frac{٨٤}{١٠٥} = \frac{٤}{٥} = ٠,٨$$

$$\frac{٣٤}{٤٠} = \frac{١٧}{٢٠} = \frac{١٧}{٢^{٢}\times ٥} = ٠,٨٥$$

العدد المكتوب أعلى العددين ٢ ، ٥ يسمى القوة أو الأس ويشير إلى المرات التي يضرب فيها العدد في نفسه . سوف ندرسه لاحقاً)

مما سبق نلاحظ الآتي :

١ . أنّ حاصل القسمة كان منتهياً .

٢ . كل عدد أصبح في صورة كسر عشري منته مقامه إحدى قوى العشرة أو إحدى قوى العددين ٢ ، ٥ أو حاصل ضرب قوى العددين ٢ ، ٥ . مثل هذه الأعداد تسمي **الأعداد النسبية العشرية .**

قاعدة :

١) كل عدد نسبي مقامه قوى العشرة يسمي عدد نسبي عشري .

٢) يكون العدد النسبي المبسط عدداً عشرياً إذا كان عوامل مقامه قوى للعددين الأولين ٢ أو ٥ أو حاصل ضربهما .

٣) العدد النسبي العشري يمكن تحويله إلي صورة كسر عشري منته .

مثـــــال (١) :

حدّد ما إذا كانت الأعداد التالية تمثل أعداداً نسبية عشرية أم لا؟

١) $\frac{١٩}{١٠٠}$ ٢) $\frac{٢١}{١٥}$ ٣) $\frac{٣٦}{٣٥}$ ٤) $\frac{٦٣}{٣٦}$

٥) $\frac{١١}{٣٣}$ ٦) $\frac{٥١٣}{١٠٠٠}$ ٧) $\frac{٢٧}{٩٠}$ ٨) $\frac{٢٥}{١٥٥}$

الحـــــل:

(١) $\frac{١٩}{١٠٠}$ عدد نسبي عشـــــري .

(٢) $\frac{٢١}{١٥} = \frac{٧}{٥}$ عدد نسبي عشري .

(٣) $\frac{٣٦}{٣٥}$ عدد نسبي غير عشري .

(٤) $\frac{٦٣}{٣٦} = \frac{٧}{٤}$ عدد نسبي عشري .

(٥) $\frac{١١}{٣٣} = \frac{١}{٣}$ عدد نسبي غير عشري .

(٦) $\frac{٥١٣}{١٠٠٠}$ عدد نسبي عشري .

(٧) $\frac{٢٧}{٩٠} = \frac{٣}{١٠}$ عدد نسبي عشري .

(٨) $\frac{٢٥}{١٥٥} = \frac{٥}{٣١}$ عدد نسبي غير عشري .

مثـــــال (٢) :

ضع قيمة للمتغير س بحيث تجعل العدد المعطى عدداً نسبياً عشرياً .(ضع رقم واحد فقط) .

(١) $\frac{س}{١٤}$ (٢) $\frac{س + ٥}{٥٥}$ (٣) $\frac{٣}{س + ٧}$

الحـــل:

لكي يكون العدد نسبياً عشرياً يجب أن يكون المقام ١٠ أو ٢ أو ٥ أو إحدى قوى الأعداد (١٠ ، ٢ ، ٥) أو حاصل ضرب قوى الأعداد (١٠ ، ٢ ، ٥) .

١) بوضع س = ٧ يكون $\frac{س}{١٤} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$

٢) بوضع س = ٦ يكون $\frac{س + ٥}{٥٥} = \frac{١١}{٥٥} = \frac{١}{٥}$

٣) بوضع س = ٣ يكون $\frac{٣}{س + ٧} = \frac{٣}{١٠}$

تمرين (١)

١) حدّد ما إذا كان العدد النسبي التالي عشريا أم لا :

أ/ $\frac{٨}{١٢}$ ب/ $\frac{٥١}{٧٥}$ جـ/ $\frac{٤٩}{٣٥}$ د/ $\frac{٧}{٤٤}$

هـ/ $\frac{٣}{٨}$ و/ $\frac{٦١}{٥٠}$ ز/ $\frac{٣٥}{٣٢}$ ح/ $\frac{٤٥}{٦٠}$

٢) جد قيمة المجهول س بوضع رقماً واحداً ليجعل الأعداد الآتية أعداداً نسبية عشرية :

أ/ $\frac{٢ س}{١٥}$ ب/ $\frac{١٥}{٢١ + س}$ جـ/ $\frac{س + ٣}{٤٥}$ د/ $\frac{س}{س + ٦}$

(١ – ٢) مجموعة الأعداد النسبية الدورية

نشاط (٢) :

حوّل الأعداد النسبية التالية إلى كسور عشرية :

$$\frac{٢}{٣} \quad ، \quad \frac{٧}{٩} \quad ، \quad \frac{٨}{١١} \quad ، \quad \frac{١٣}{١١١}$$

$$\frac{٢}{٣} = \text{٠,٦٦٦٦} \longrightarrow$$

$$\frac{٧}{٩} = \text{٠,٧٧٧٧} \longrightarrow$$

$$\frac{٨}{١١} = \text{٠,٧٢٧٢٧٢} \longrightarrow$$

$$\frac{١٣}{١١١} = \text{٠,١١٧١١٧١١٧} \longrightarrow$$

- هل انتهت عملية القسمة في كل حالة؟
- ما الأرقام أو مجموعة الأرقام المتكررة في كل حالة؟
- ما عوامل المقام في كل حالة؟
- هل عوامل المقام قوى للعددين ٢ ، ٥ ؟

مما سبق نلاحظ أنّ حاصل قسمة بسط العدد النسبي على مقامه يتكرر فيه نفس الرقم أو الأرقام بصورة غير منتهية لذلك نسمي العدد النسبي من هذا النوع **بالعدد النسبي الدوري** .

∴ العدد $\frac{٢}{٣}$ = ٠,٦٦٦٦⟵ عدد نسبي دوري ويكتب بصورة مختصرة $\frac{٢}{٣} = \text{٠,}\overline{\text{٦}}$

ونسمي العدد ٦ المتكرر **دورة الكسر** وتقرأ ٦ دورية

العدد $\frac{٨}{١١}$ = ٠,٧٢٧٢٧٢⟵ يكتب بصورة مختصرة $\frac{٨}{١١} = \text{٠,}\overline{\text{٧٢}}$

العدد $\frac{١٣}{١١١}$ = ٠,١١٧١١٧١١٧⟵ يكتب بصورة مختصرة $\frac{١٣}{١١١} = \text{٠,}\overline{\text{١١٧}}$

مثـــــال :

اكتب الأعداد الدورية التالية بصورة مختصرة :

أ) ٠,٨٨٨٨⟶   ب) ٠,٢٣٣٣٣⟶

جـ) ١,٥٢٥٢٥٢⟶   د) ٢,٢١٦٢١٦٢١٦⟶

الحـــــل:

(أ) ٠,٨٨٨٨⟶ = $٠,\overline{٨}$

(ب) ٠,٢٣٣٣٣⟶ = $٠,٢\overline{٣}$

(ج) ١,٥٢٥٢٥٢⟶ = $١,\overline{٥٢}$

(د) ٢,٢١٦٢١٦٢١٦⟶ = $٢,\overline{٢١٦}$

نشاط (٣) :

١ . كوّن مجموعة من الأعداد النسبية في صورة $\frac{أ}{ب}$

٢ . قم بتحويلها إلى الصورة العشرية .

٣ . ماذا تلاحظ من صورتها العشرية . هل هي منتهية أم متكررة؟

نشاط (٤) :

حوّل الأعداد النسبية التالية إلى الصورة العشرية .

$\frac{٤}{٦}$ = ٠,٦٦٦⟶ ، $\frac{٥}{٤}$ = ١,٢٥ ، $\frac{٢}{٩}$ = ٠,٢٢٢⟶ ، $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦

ماذا تلاحظ من الصورة العشرية للأعداد النسبية السابقة؟

نلاحظ مما سبق أنّ الصورة العشرية لأي عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ إما أن تنتهي وإما أن تتكرر وبالتالي يمكن القــــــــول أنّ :

> مجموعة الأعداد النسبية مجزأة إلى مجموعتين منفصلتين :
>
> (١) مجموعة الأعداد النسبية العشرية .
>
> (٢) مجموعة الأعداد النسبية الدورية .

تمرين (٢)

(١) اكتب أول ٦ منازل عشرية لكل من الأعداد التالية :

أ/ $٠,١\overline{٢}$ ب/ $٠,\overline{١٢}$ جـ/ $١,١\overline{٢٦}$ د/ $١,\overline{١٢٦}$

(٢) بدون إجراء القسمة حدّد ما إذا كانت الأعداد النسبية التالية عشرية أم دورية مع ذكر السبب .

$\frac{٢١}{١٢}$ ، $\frac{٢٢}{١٢}$ ، $\frac{٤٢}{٤٥}$ ، $\frac{٢٤}{٣٣}$ ، $\frac{٧٧}{٨٨}$

(٣) ضع الرمز ‹ ، › ، = في المكان المناسب :

أ . $٠,\overline{٣٠}$ .... $٠,\overline{٠٣}$

ب . $٠,\overline{٠٣}$ .... $٠,٠\overline{٣}$

جـ . $٠,٣\overline{٠٣}$ .... $٠,\overline{٣٠}$

د . $٠,\overline{٠٣٠}$ .... $٠,\overline{٠٣}$

(٤) ضع قيمة من رقم واحد للمتغير س بحيث يجعل الأعداد النسبية التالية :

أ) عشرية ب) دورية

١/ $\frac{س}{١٥}$ ٢/ $\frac{٧ - س}{٣٠}$ ٣/ $\frac{١٣}{س + ٢}$

(١ – ٣) جمع وطرح الأعداد النسبية الدورية

إنّ عمليتي الجمع والطرح على الأعداد الدورية تتم بنفس خطوات عمليتي الجمع والطرح على الكسور العشرية ولكن مع الوضع في الاعتبار أن الأعداد الدورية هي أعداد متكررة غير منتهية .

تدريب:

جد قيمة الآتي :

١) ٢,٦٧١ + ٠,٩٨٢ ٢) ١,٧٤٦ – ٠,٨٥٢

مثـــــال (١):

جد قيمة ما يلي :

أ) $٠,\overline{١٥} + ٠,\overline{٤٢}$ ب) $١,\overline{٥٦} + ٣,\overline{٢}$ جـ) $٧,\overline{٨٤} + ٠,\overline{٧٩}$

الحـــــل:

أ) ← ٠,١٥١٥١٥١٥

← ٠,٤٢٤٢٤٢٤٢

← ٠,٥٧٥٧٥٧٥٧ = $٠,\overline{٥٧}$

ب) ← ١,٥٦٥٦٥٦٥٦

← ٣,٢٢٢٢٢٢٢٢

← ٤,٧٨٧٨٧٨٧٨ = $٤,\overline{٧٨}$

جـ) ← ٧,٨٤٨٤٨٤٨٤ (١)

← ٠,٧٩٧٩٧٩٧٩

← ٨,٦٤٦٤٦٤٦٤ = $٨,\overline{٦٤}$

مثـــال (٢):

جد قيمة ما يلي :

أ) $٢,\overline{٦} - ١,\overline{٦}$ ب) $٠,\overline{٥٩} - ٠,\overline{٣٢}$ جـ) $١,\overline{٢١} - ٠,\overline{٥٣}$

الحـــل:

أ) $٢,\overline{٦} - ١,\overline{٦}$

$\rightarrow ٢,٦٦٦٦٦$

$\rightarrow \underline{١,٦٦٦٦٦}$

$\rightarrow \underline{\underline{١,٠٠٠٠٠}} = ١$

ب) $٠,\overline{٥٩} - ٠,\overline{٣٢}$

$\rightarrow ٠,٥٩٥٩٥٩$

$\rightarrow \underline{٠,٣٢٣٢٣٢}$

$\rightarrow \underline{\underline{٠,٢٧٢٧٢٧}} = ٠,\overline{٢٧}$

جـ) $١,\overline{٢١} - ٠,\overline{٥٣}$

$\rightarrow ١,٢١٢١٢١٢١$

$\rightarrow \underline{٠,٥٣٥٣٥٣٥٣}$

$\rightarrow \underline{\underline{٠,٦٧٦٧٦٧٦٧}} = ٠,\overline{٦٧}$

تمرين (٣)

(أ) جد قيمة ما يلي :

١) $١,\overline{٤} + ٧,\overline{٣}$ ٢) $٢,\overline{٢٦} - ١,\overline{٠٥}$ ٣) $٠,\overline{٩٦} + ٠,\overline{٣٧}$

٤) $٠,\overline{٤٢٦} - ٠,\overline{٣١٧}$ ٥) $٨,\overline{٣٥} - ٢,\overline{٩}$

(ب) أكمل ما يلي :

١) $٢,\overline{٥١} - \boxed{} = ١,\overline{٣}$ ٢) $١٠,\overline{٢٦} = \boxed{} - ٢,\overline{٣٥}$

(١-٤) تحويل الأعداد الدورية إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$، ب ≠ ٠

فيما سبق تعرفنا كيفية تحويل العدد النسبي من صورة $\frac{أ}{ب}$ إلى عدد عشري أو عدد دوري ، وأيضاً تعرفنا كيفية تحويل الكسور العشرية المنتهية إلى صورة $\frac{أ}{ب}$ مثلاً :

$$٠{,}٧ = \frac{٧}{١٠} \quad ، \quad ١{,}٤ = ١\frac{٤}{١٠} = \frac{١٤}{١٠}$$

ولكن كيف نحوّل العدد النسبي الدوري إلى صورة $\frac{أ}{ب}$ ؟

تعلمنا من دراستنا للكسور العشرية انه إذا ضُرب العدد العشري في ١٠ فإن العلامة العشرية تتحرك منزلة واحدة نحو اليمين ، وإذا ضُرب في ١٠٠ تتحرك منزلتين عشريتين نحو اليمين وهكذا . مثلاً :

$$٠{,}\overline{٣} \times ١٠ = \longrightarrow ٠{,}٣٣٣ \times ١٠ = \longrightarrow ٣{,}٣٣ = ٣{,}\overline{٣}$$

$$٠{,}\overline{٢٦} \times ١٠٠ = \longrightarrow ٠{,}٢٦٢٦٢٦ \times ١٠٠ = \longrightarrow ٢٦{,}٢٦٢٦ = ٢٦{,}\overline{٢٦}$$

$$٠{,}\overline{٢٤٣} \times ١٠٠٠ = \longrightarrow ٠{,}٢٤٣٢٤٣٢٤٣ \times ١٠٠٠ = \longrightarrow ٢٤٣{,}٢٤٣٢٤٣ = ٢٤٣{,}\overline{٢٤٣}$$

مثـــــال (١) : حوّل $٠{,}\overline{٤}$ إلى صورة $\frac{أ}{ب}$

الحــــل:

لتحويل $٠{,}\overline{٤}$ إلى صورة $\frac{أ}{ب}$ نتبع الخطوات التالية :

(أ) نفرض أنّ س = $٠{,}\overline{٤}$ (١)

ب) نضرب العدد في ١٠ ∴ ١٠س = $٤{,}\overline{٤}$ (٢)

ج) نطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) ∴ ٩س = ٤

(د) نوجد قيمة س ∴ س = $\frac{٤}{٩}$

ولكن س = $٠{,}\overline{٤}$ ∴ $٠{,}\overline{٤} = \frac{٤}{٩}$

ملاحظة :

أننا ضربنا في ١٠ لأن العدد الذي يتكرر هو رقماً واحداً فقط .

مثـــــال (٢) :

حوّل فيما يلي إلى صورة $\frac{أ}{ب}$

أ) ٠,$\overline{٦٣}$ ب) ٠,$\overline{١٢٣}$ جـ) ١,٤$\overline{٥}$ د) ٣,١$\overline{٥١}$

الحـــــل:

أ) نفرض أنّ س = ٠,$\overline{٦٣}$ (١)

∴ ١٠٠س = ٦٣,$\overline{٦٣}$ (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ ٩٩س = ٦٣

∴ س = $\frac{٦٣}{٩٩}$ = $\frac{٧}{١١}$

∴ ٠,$\overline{٦٣}$ = $\frac{٧}{١١}$

لاحظ :

أننا ضربنا في ١٠٠ لأن العدد الذي يتكرر مكوّن من رقمين .

ب) نفرض أنّ س = ٠,$\overline{١٢٣}$ (١)

∴ ١٠٠٠س = ١٢٣,$\overline{١٢٣}$ (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ٩٩٩س = ١٢٣

∴ س = $\frac{١٢٣}{٩٩٩}$ = $\frac{٤١}{٣٣٣}$

∴ ٠,$\overline{١٢٣}$ = $\frac{٤١}{٣٣٣}$

لماذا ضربنا في ١٠٠٠ ؟

جـ) نفرض أنّ س = ١,٤$\overline{٥}$ (١)

∴ ١٠س = ١٤,$\overline{٥}$ (٢)

∴ ١٠٠س = ١٤٥,$\overline{٥}$ (٣)

بطرح (٢) من (٣) ∴ ٩٠س = ١٣١

∴ س = $\frac{١٣١}{٩٠}$ ∴ ١,٤$\overline{٥}$ = $\frac{١٣١}{٩٠}$

لماذا ضربنا أولاً في ١٠ ثم ضربنا في ١٠٠ ؟

د) نفرض أنّ س = ٣,١$\overline{٥١}$ (١)

١٠س = ٣١,$\overline{٥١}$ (٢)

١٠٠٠س = ٣١٥١,$\overline{٥١}$ (٣)

بطرح (٢) من (٣)

٩٩٠س = ٣١٢٠

∴ س = $\frac{٣١٢٠}{٩٩٠}$ = $\frac{١٠٤}{٣٣}$

∴ ٣,١$\overline{٥١}$ = $\frac{١٠٤}{٣٣}$

تمرين (٤)

(أ) جد قيمة الآتي :

١) $٠,٥\overline{٧} \times ١٠$　　　٢) $٢,\overline{٣} \times ١٠$

٣) $١,\overline{٢٧} \times ١٠٠$　　　٤) $٧,١\overline{٣١٤} \times ١٠٠٠$

(ب) حوّل ما يلي إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$:

١) $٣,\overline{٣}$　　　٢) $١,\overline{١٢}$　　　٣) $٠,\overline{٨١}$　　　٤) $٠,\overline{١٣٢}$

٥) $٠,\overline{١٠١}$　　　٦) $٢,١\overline{٧}$　　　٧) $١,٧\overline{٤٥}$　　　٨) $٣,١٢\overline{٨}$

(١-٥) مجموعة الأعداد غير النسبية

فيما سبق درسنا الأعداد النسبية العشرية والأعداد النسبية الدورية وتعرفنا كيفية تحويلها إلى صورة $\frac{أ}{ب}$ ، ب $\neq$ ٠

لاحظ الأعداد التالية :

(١) ← ٠,١٢١١٢٢١١١٢٢٢ ، ← ٠,٥٧٥٧٧٥٧٧٧

- هل هذه الكسور العشرية منتهية؟
- هل يتكرر عدداً واحداً أو مجموعة من الأعداد؟
- هل يمكن تحويلها إلى صورة $\frac{أ}{ب}$ ؟

(٢) تعرفنا سابقاً كيفية إيجاد الجذور التربيعية للأعداد ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ...

ماذا نسمي هذه الأعداد ؟

- جد $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ ، $\sqrt{\frac{٤٩}{٨١}}$ ، $\sqrt{٢\frac{٧}{٩}}$
- هل هي أعداد نسبية؟

(٣) هل يمكن إيجاد قيم $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{١١}$ ، $\sqrt{٢٩}$ ، $\sqrt{\frac{١٧}{٢٣}}$

هل يمكن إيجاد الجذور التربيعية لمثل هذه الأعداد بحيث يمكن وضعها في صورة $\frac{أ}{ب}$

الأعداد في (١) ، (٣) السابقة لا يمكن وضعها في صورة $\frac{أ}{ب}$ ومثل هذه الأعداد لا تنتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية وتسمى **الأعداد غير النسبية** .

من خلال دراستنا السابقة وجدنا أنّ :

ط ⊂ ك ⊂ ص ⊂ ن

وهذا يعني أنّ ك توسيع للمجموعة ط ، ص توسيع للمجموعة ك حيث يمكن حل معادلات في ص إجابتها غير موجودة في ك ، و ن توسيع للمجموعة ص مما مكّننا من حل معادلات في ن إجابتها غير موجودة في ص .

والواقع هناك مسائل إجابتها غير موجودة في ن مما دفع الرياضيون للبحث عن أعداد أخرى غير نسبية لحل مسائل مثل س = $\sqrt{\text{٣}}$ ، س = $\sqrt{\text{٨}}$

وعند البحث عن الجذور التربيعية لأعداد ليست مربعات كاملة فإن الكسر العشري الناتج لا ينتهي إطلاقاً واستمراره لا يكون بصورة الكسر الدوري الذي عرفناه ولذلك فهي كسور عشرية غير منتهية وغير دورية . بالإضافة للأعداد مثل ١,٢٠٢٠٠٢٠٠٠٢ ⟵ وغيرها .
ومن الأعداد غير النسبية المشهورة العدد π ويكتب بصورة تقريبية $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$ أو ٣,١٤

تعريف:

الأعداد غير النسبية هي الأعداد التي يكون تمثيلها العشري غير منتهي وغير دوري ويرمز لها بالرمز ن* ولا يمكن التعبير عنها على الصورة :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

مثـــــال (٣):

وضّح الأعداد النسبية وغير النسبية فيما يلي :

أ) $\sqrt{\frac{\text{١٤٤}}{\text{١٦٩}}}$ ب) ٠,٣١٣١١٣١١١ ⟵ جـ) $\sqrt{\text{١,٢١}}$ د) ٣,٢$\overline{\text{١٤}}$

هـ) $\sqrt{\text{١٩}}$

الحــــل:

(أ) $\sqrt{\frac{١٤٤}{١٦٩}} = \frac{١٢}{١٣}$ عدد نسبي .

(ب) ← ٠,٣١٣١١٣١١١ غير نسبي لأنه غير منتهي وغير دوري .

(ج) $\sqrt{١,٢١} = ١,١ = \frac{١١}{١٠}$ عدد نسبي .

(د) $٣,\overline{٢١٤}$ عدد نسبي لأن الكسر دوري .

(هـ) $\sqrt{١٩}$ غير نسبي لأن ١٩ ليس مربعاً كاملاً .

تمرين (٥)

وضّح ما إذا كانت الأعداد التالية نسبية أم غير نسبية مع ذكر السبب :

١) $\sqrt{\frac{١٦}{٩}}$ ٢) $١١,\overline{٤١}$ ٣) ← ٠,٧٤٧٧٤٧٧٧ ٤) $\sqrt{١,٩٦}$

٥) $\sqrt{\frac{٦}{١١}}$ ٦) $\sqrt{١٤٣}$ ٧) $١,\overline{٥}$ ٨) $\sqrt{٩,٩}$

٩) ٢ ١٠) ← ٣,٢٨٥٧١٤ ٢٨٥٧١٤

(١–٦) مجموعة الأعداد الحقيقية وتمثيلها على خط الأعداد:

نعلم أنّ مجموعة الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة جزئية من الأعداد النسبية وكذلك الأعداد العشرية المنتهية والدورية .

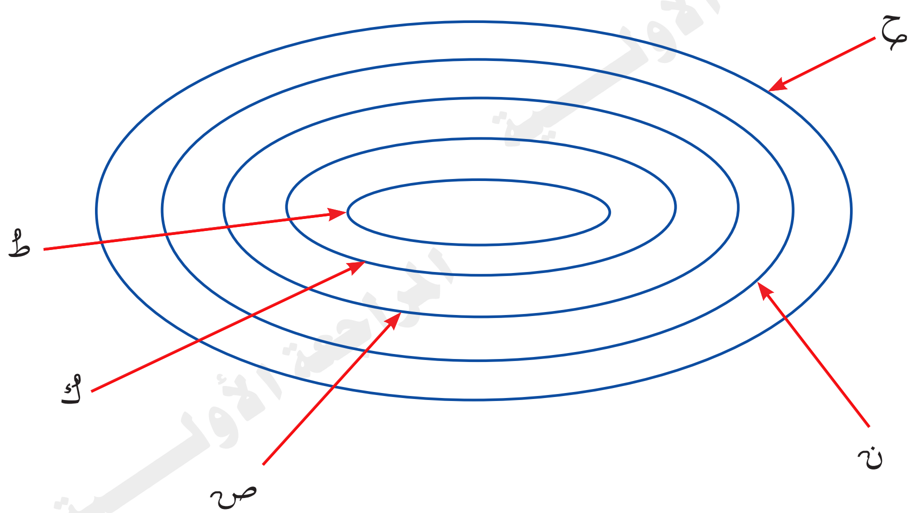
وعند إجراء عملية الاتحاد لمجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية نتحصل على مجموعة جديدة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز ح

$$\boxed{\text{إذن ح} = \text{ن} \cup \text{ن}^*}$$

وهذا يعني أنّ كل مجموعات الأعداد المذكورة أعلاه جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية أي أنّ :

$$\boxed{\text{ط} \subset \text{ك} \subset \text{ص} \subset \text{ن} \subset \text{ح}}$$

ويمكن توضيحها بشكل فن كالآتي :



الشكل التالي يوضّح المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية :

- الأعداد الحقيقية ح
  - الأعداد النسبية ن
    - الأعداد الصحيحة ص
      - الأعداد الكلية ك
        - الأعداد الطبيعية ط
        - الصفر
      - الأعداد الصحيحة السالبة
    - الأعداد غير الصحيحة (الكسور)
  - الأعداد غير النسبية ن*

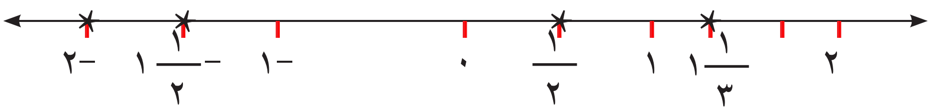
ولتمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد نتبع طريقة تمثيل الأعداد الصحيحة والكسور التي درستها سابقاً .

مثـــــال :

مثّل الأعداد الحقيقية التالية على خط الأعداد

-٢ ، $١\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-١\frac{١}{٢}$

الحــــل:

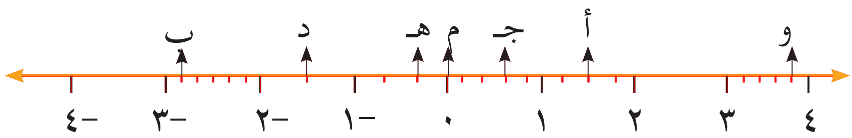


تمرين (٦)

(١) ارسم خط الأعداد وعيّن عليه الأعداد التالية :

أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) $-١\frac{١}{٤}$ جـ) ١ د) $-\frac{١}{٢}$ هـ) $١\frac{١}{٥}$

(٢) اكتب الأعداد المشار إليها بالحروف في الشكل أدناه :



(١–٧) خواص العمليات على مجموعة الأعداد الحقيقية

درسنا سابقاً في الصفين السادس الابتدائي والأول متوسط بعض الخواص المتعلقة بالأعداد الصحيحة والنسبية ، الآن سوف نتعرّف على الخواص المتعلقة بعمليتي الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الحقيقية :

(١) الإغلاق :

أ) المجموعة ح مغلقة تحت عملية الجمع بحيث أنّ حاصل جمع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي أيضاً . مثلاً :

٧ + ٢ = ٩ ∈ ح ، (٣ + √٥) ∈ ح

أي أنّ :

لكل س ، ص ∈ ح فإن (س + ص) ∈ ح

ب) المجموعة ح مغلقة تحت عملية الضرب بحيث أنّ حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو حقيقي أيضاً . مثلاً :

٤ × ٢ = ٨ ∈ ح ، √٦ × ٣ = ٣ √٦ ∈ ح

أي أن :

لكل س ، ص ∈ ح فإن س ص ∈ ح

(٢) الإبدال :

لكل س ، ص ∋ ح فإن :

س + ص = ص + س ، س ص = ص س

مثلاً :

١١ + ٦ = ٦ + ١١ = ١٧

٤ × ٢,٥ = ٢,٥ × ٤ = ١٠

(٣) التجميع :

لكل س ، ص ، ع ∋ ح فإن :

(أ) (س + ص) + ع = س + (ص + ع)

(ب) (س ص) ع = س (ص ع)

مثلاً :

(٤ + (–٣)) + ٥ = ٤ + (–٣ + ٥) = ٦

($\frac{٣}{٤}$ × ٨) × ٧ = $\frac{٣}{٤}$ × (٨ × ٧) = ٤٢

(٤) توزيع الضرب على الجمع :

لكل س ، ص ، ع ∋ ح فإن :

س (ص + ع) = س ص + س ع

مثلاً :

٥ (٢,٣ + ٠,٧) = ٥ × ٢,٣ + ٥ × ٠,٧ = ١٥

(٥) العنصر المحايد للجمع :

يوجد عنصراً محايداً للجمع في ح هو (٠) بحيث :

لكل س ∈ ح فإن س + ٠ = ٠ + س = س

مثلاً :

٩ + ٠ = ٠ + ٩ = ٩

(٦) العنصر المحايد للضرب :

يوجد عنصراً محايداً للضرب في ح هو (١) بحيث :

لكل س ∈ ح فإن س × ١ = ١× س = س

مثلاً :

٠,٢ × ١ = ١ × ٠,٢ = ٠,٢

(٧) النظير الجمعي :

لكل س ∈ ح يوجد (–س) ∈ ح بحيث :

–س + س = س + (–س) = ٠

مثلاً :

–٧ + ٧ = ٧ + (–٧) = ٠

(٨) النظير الضربي :

لكل س ≠ ٠ ∈ ح يوجد $\frac{١}{س}$ ∈ ح بحيث س × $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{س}$ × س = ١

يسمى $\frac{١}{س}$ النظير الضربي (مقلوب) للعدد س

(٩) الاختزال :

ليكن س ، ص ، ع ∈ ح

إذا كان س + ص = س + ع فإن ص = ع

إذا كان س ص = س ع فإن ص = ع

مثلاً :

إذا كان س + ٧ = ص + ٧ فإن س = ص

إذا كان $\frac{٦}{٧}$ س = $\frac{٦}{٧}$ ص فإن س = ص

مثـــــال:

جد النظير الجمعي والضربي للأعداد التالية :

أ) −٧ ب) $\frac{١}{٩}$ جـ) $\frac{٥}{٦}$ د) − $\frac{١٢}{١٣}$ هـ) $\frac{س}{ص}$

الحـــــل:

النظير الجمعي للعدد	النظير الضربي للعدد
أ) −٧ هو ٧ ، −٧ + ٧ = ٠	أ) −٧ هو − $\frac{١}{٧}$ ، −٧ × (− $\frac{١}{٧}$) = ١
ب) $\frac{١}{٩}$ هو − $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٩}$ + (− $\frac{١}{٩}$) = ٠	ب) $\frac{١}{٩}$ هو ٩ ، $\frac{١}{٩}$ × ٩ = ١
جـ) $\frac{٥}{٦}$ هو − $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٥}{٦}$ + (− $\frac{٥}{٦}$) = ٠	جـ) $\frac{٥}{٦}$ هو $\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{٥}{٦}$ × $\frac{٦}{٥}$ = ١
د) − $\frac{١٢}{١٣}$ هو $\frac{١٢}{١٣}$ ، − $\frac{١٢}{١٣}$ + $\frac{١٢}{١٣}$ = ٠	د) − $\frac{١٢}{١٣}$ هو − $\frac{١٣}{١٢}$ ، − $\frac{١٢}{١٣}$ × (− $\frac{١٣}{١٢}$) = ١
هـ) $\frac{س}{ص}$ هو − $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{س}{ص}$ + (− $\frac{س}{ص}$) = ٠	هـ) $\frac{س}{ص}$ هو $\frac{ص}{س}$ ، $\frac{س}{ص}$ × $\frac{ص}{س}$ = ١

تمرين (٧)

١) اكمل الجدول التالي وفق الخواص في العمليات على مجموعة الأعداد الموضحة :

مجموعة الاعداد	الاغلاق		الابدال		التجميع		العنصر المحايد		النظير	
	+	×	+	×	+	×	+	×	+	×
ط	√						×			
ك										×
ص			√							
ن					√					
ح								√		

٢) اذكر الخاصية المستخدمة في كل من العمليات التالية :

أ/ س × ١ = س

ب/ س + ص = ص + ع فإن س = ع

جـ/ ٧ × $\frac{١}{٧}$ = ١

د/ −٣ (س + ص) = −٣س − ٣ص

هـ/ (٥س) ص = ٥ (س ص)

و/ س + ص = ص + س

ز/ س + ٠ = ٠ + س = س

الوحدة الثانية

٢

النسبة والتناسب

+ ٣ + ٣

عدد الأسطر	٣	٦	٩
الزمن (الدقيقة)	١	٢	٣

+ ١ + ١

(٢-١) تطبيقات على النسبة

لقد درست سابقاً أنّ النسبة هي مقارنة بين كميتين وحدات قياسهما من نفس النوع وتكتب على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ مقدم النسبة (الحد الأول) ، ب تالي النسبة (الحد الثاني)

أي أنّ :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين هما قياسات من وحدة واحدة لكميتين من نوع واحد فإن النسبة بين أ ، ب هي العدد الحقيقي $\frac{أ}{ب}$ الذي يدل على عدد مرات أ على عدد مرات ب

وهذا يعني :

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فهذا لا يعني أن : أ = ٣ ، ب = ٥ لأن نفس الكمية يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{١٠} = \frac{١٢}{٢٠}$ ، . . . إلخ (الكسور المتكافئة)

لذلك يمكن اعتبار أن أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك حيث ك $\in$ ح$^+$

مثـــال (١) :

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ جد قيمة $\frac{٢\,أ + ٣ب}{٢١\,أ - ٨\,ب}$

الحـــل:

أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك حيث ك $\in$ ح$^+$

$$\frac{٢\,أ + ٣ب}{٢١\,أ - ٨\,ب} = \frac{٢ \times ٣\,ك + ٣ \times ٥\,ك}{٢١ \times ٣\,ك - ٨ \times ٥\,ك} = \frac{٦\,ك + ١٥ك}{٦٣\,ك - ٤٠\,ك} = \frac{٢١\,ك}{٢٣\,ك} = \frac{٢١}{٢٣}$$

حل آخر :

نقسم حدي النسبة على ب تصبح :

$$\frac{\frac{\text{٢ أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{٣ ب}}{\text{ب}}}{\frac{\text{٢١ أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{٨ ب}}{\text{ب}}} = \frac{\text{٢}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) + \text{٣}}{\text{٢١}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) - \text{٨}} = \frac{\text{٢} \times \frac{\text{٣}}{\text{٥}} + \text{٣}}{\text{٢١} \times \frac{\text{٣}}{\text{٥}} - \text{٨}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{٦}}{\text{٥}} + \text{٣}\right) \times \text{٥}}{\left(\frac{\text{٦٣}}{\text{٥}} - \text{٨}\right) \times \text{٥}} = \frac{\text{٦} + \text{١٥}}{\text{٦٣} - \text{٤٠}} = \frac{\text{٢١}}{\text{٢٣}}$$

مثـــال (٢) : :

عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما $\frac{\text{٥}}{\text{٧}}$ إذا طرح ٦ منهما تصبـــــح النسبة بينهما $\frac{\text{١١}}{\text{١٦}}$ فما العددان ؟

الحـــــل:

نفرض أنّ العددين هما ٥ ك ، ٧ ك

بطرح ٦ منهما يصبح العددين ٥ ك − ٦ ، ٧ ك − ٦

$\therefore$ $\frac{\text{٥ ك} - \text{٦}}{\text{٧ ك} - \text{٦}} = \frac{\text{١١}}{\text{١٦}}$ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

١٦ (٥ ك − ٦) = ١١ (٧ ك − ٦) [ملاحظة : أ (ب + جـ) = أ ب + أ جـ]

٨٠ ك − ٩٦ = ٧٧ ك − ٦٦

٨٠ ك − ٧٧ ك = ٩٦ − ٦٦

$\therefore$ ٣ ك = ٣٠ $\therefore$ ك = ١٠

$\therefore$ العدد الأول = ٥ × ١٠ = ٥٠ ، العدد الثاني = ٧ × ١٠ = ٧٠

تمرين (١)

١) عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما $\frac{٤}{٩}$ ، إذا طرح ١٠ من كل منهما تصبح النسبة بينهما $\frac{٢}{٧}$ فما العددين ؟

٢) عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما $\frac{٥}{٨}$ ، إذا أضيف ٤ إلى كل منهما تصبح النسبة بينهما $\frac{١٣}{٢٠}$ فما هما العددان ؟

٣) يقطع عثمان المسافة بين المدينتين أ ، ب ماشياً في زمن قدره ساعتان و ١٤ دقيقة بينما يقطع نفس المسافة راكباً دراجة في زمن قدره ٥٠ دقيقة جد نسبة الزمن ماشياً إلى الزمن راكباً دراجة .

٤) جد العدد الموجب الذي إذا اضيف مربعه إلى مقدم النسبة $\frac{٢٩}{٤٦}$ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة $\frac{٣}{٢}$

(٢-٢) التناسب

تعرفت سابقاً أن التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر

فمثلاً :

إذا تساوى نسبتان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ فإن الصورة $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ تسمى تناسباً .

ويقال أن الكميات أ ، ب ، جـ ، د ، متناسبة أو تكوّن تناسباً . ويُسمّى أ الأول المتناسب ، ب الثاني المتناسب ، جـ الثالث المتناسب ، د الرابع المتناسب

كما يُسمّى أ ، د طرفي التناسب ، ب ، جـ وسطي التناسب .

مثـــال (١) :

جد الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحـــل:

نفرض أنّ الرابع المتناسب هو س

∴ الأعداد هي ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

بما أنّ الأعداد متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

∴ $\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

٤ × س = ١٦ × ١٢ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

∴ س = $\frac{١٦ \times ١٢}{٤}$ = ٤٨

∴ الرابع المتناسب = ٤٨

تحقق من ذلك

مثـــال (٢):

جد الثالث المتناسب لكميتين ٢ $أ^{٢}$ ب ، أ ب

الحـــل:

نفرض أن الثالث المتناسب هو س

∴ الكميات ٢ $أ^{٢}$ب ، أ ب ، س متناسبة

$$\therefore \frac{٢\,أ^{٢}ب}{أ\,ب} = \frac{أ\,ب}{س}$$

$$\therefore ٢\,أ = \frac{أ\,ب}{س}$$

$$\therefore س = \frac{أ\,ب}{٢\,أ} = \frac{ب}{٢}$$

تحقق من ذلك

مثال (٣):

جد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٤ ، ١٠ فإنها تكوّن تناسباً .

الحل:

نفرض أنّ العدد هو س

تصبح الأعداد هي ١+ س ، ٤ + س ، ١٠ + س

$$\therefore \quad \frac{١ + س}{٤ + س} = \frac{٤ + س}{١٠ + س}$$ (بالضرب العكسي)

(١+ س) (١٠ +س) = (٤+ س) (٤ + س)

١٠ + س + ١٠س + $س^{٢}$ = ١٦ + ٤ س + ٤س + $س^{٢}$

١٠ + ١١س + $س^{٢}$ = ١٦+ ٨ س + $س^{٢}$

١٠ + ١١س = ١٦+ ٨ س

١١س − ٨س = ١٦ − ١٠

٣س = ٦

∴ س = ٢

∴ العدد هو ٢

تحقق من ذلك .

ملحوظة :

١− (أ + ب) (جـ + د) = أ جـ + أ د + ب جـ + ب د

٢− $س^{٢}$ تعني س × س

تمرين (٢)

١) جد الثالث المتناسب للأعداد ٨ ، ٦ ، . . . ، ١٢

٢) جد الرابع المتناسب للكميات ٤ $أ^{٢}$ ب ، ٢ أ $ب^{٣}$ ، $ب^{٢}$ حيث ($ب^{٣}$ = ب × ب × ب)

٣) جد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٥ فإنّها تكوّن تناسباً .

٤) جد العدد الذي إذا طرح من كل من الأعداد ٦ ، ١٢ ، ٣٠ فإنّها تكوّن تناسباً .

٥) جد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٦ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٩ لحصلنا على أعداد متناسبة .

(٢-٣) بعض خواص التناسب

(أ) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن :

١) أد = ب جـ   ٢) $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$ ٣) $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

نشاط (١) :

كوّن مجموعة من التناسبات من $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

(ب) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن :

١) $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$ ٢) $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$

٣) $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{جـ + د}{جـ - د}$

مثلاً : $\frac{٢}{٤} = \frac{٦}{١٢}$

نجد أنّ : $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{٢ + ٤}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{جـ + د}{د} = \frac{٦ + ١٢}{١٢} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

(جـ) في اي تناسب كل نسبة = $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$

نشاط (٢) :

تحقق من بقية الخواص بإعطاء أمثلة عددية من عندك .

مثـــال (١):

إذا كان $\frac{\text{٥ س} - \text{ص}}{\text{٣س} + \text{ص}} = \frac{\text{٧}}{\text{٩}}$ جد النسبة $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحـــــل:

٩ (٥ س − ص) = ٧ (٣ س + ص)   [خاصية (أ) (١)]

٤٥ س − ٩ ص = ٢١ س + ٧ ص

٤٥ س − ٢١ س = ٩ ص + ٧ ص

٢٤ س = ١٦ ص

بالقسمة على ٢٤ ص

$$\frac{\text{٢٤ س}}{\text{٢٤ ص}} = \frac{\text{١٦ ص}}{\text{٢٤ ص}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{١٦}}{\text{٢٤}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

مثـــال (٢):

إذا كان $\frac{س + ص}{ص} = \frac{٥}{٤}$ جد $\frac{س}{ص}$

الحـــل:

$\frac{س + ص}{ص} = \frac{١ + ٤}{٤}$ [استخدم الخاصية (ب) (١)]

بالمقارنة س = ١ ، ص = ٤ $\therefore \frac{س}{ص} = \frac{١}{٤}$

حل آخر :

$\frac{(س + ص) - ص}{ص} = \frac{٥ - ٤}{٤}$ [استخدم الخاصية (ب) (٢)]

$\frac{س + \cancel{ص} - \cancel{ص}}{ص} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{١}{٤}$

مثـــال (٣):

إذا كان $\frac{س + ٣}{س - ٣} = \frac{ص + ٤}{ص - ٤}$ أثبت أنّ : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$

الحـــــل:

باستخدام الخاصية (ب) (٣) وهي تعني :

$$\frac{\text{مقدم النسبة الأولى + تاليها}}{\text{مقدم النسبة الأولى − تاليها}} = \frac{\text{مقدم النسبة الثانية + تاليها}}{\text{مقدم النسبة الثانية − تاليها}}$$

$$\frac{(\text{س} + ٣) + (\text{س} - ٣)}{(\text{س} + ٣) - (\text{س} - ٣)} = \frac{(\text{ص} + ٤) + (\text{ص} - ٤)}{(\text{ص} + ٤) - (\text{ص} - ٤)}$$

$$\frac{\text{س} + ٣ + \text{س} - ٣}{\text{س} + ٣ - \text{س} + ٣} = \frac{\text{ص} + ٤ + \text{ص} - ٤}{\text{ص} + ٤ - \text{ص} + ٤}$$

$$\frac{٢\,\text{س}}{٦} = \frac{٢\,\text{ص}}{٨}$$

$$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$$ [خاصية (أ) (٣)]

تمرين (٣)

(١) إذا كان : $\frac{٣\text{س} - \text{ص}}{٢\text{ص} - \text{س}} = \frac{٧}{٣}$ جد $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

(٢) إذا كان : $\frac{\text{س} + ٢\text{ص}}{٢\text{ص}} = \frac{٧}{٦}$ جد $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

(٣) إذا كان $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}$ أثبتْ أنّ : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

(٣) إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}}$ أثبتْ أنّ :

$$\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{جـ} + \text{أ}}{\text{ع} + \text{س}}$$

(٢–٤) التناسب المتسلسل

في الأعداد ٤ ، ٨ ، ١٦

- قارن بين النسب $\frac{٤}{٨}$ ، $\frac{٨}{١٦}$ ماذا تلاحظ ؟
- هل توجد علاقة بين ٨ × ٨ وحاصل الضرب ٤ × ١٦ ؟

تعريف:

يقال للكميات أ ، ب ، جـ إنها في تناسب متسلسل

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ (حيث ب^{٢} = أ جـ أو ب = ± $\sqrt{أ\,جـ}$)

أ يُسمّى الأول المتناسب ، ب الوسط المتناسب ، جـ الثالث المتناسب .

مثـــال (١):

هل الأعداد ٥ ، ١٠ ، ٢٠ تشكل تناسباً متسلسلاً ؟

الحـــل:

يكون التناسب متسلسلاً إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

أ = ٥ ، ب = ١٠ ، جـ = ٢٠

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{ب}{جـ} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$$

بما أن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

∴ الأعداد ٥ ، ١٠ ، ٢٠ تشكل تناسباً متسلسلاً .

مثـــال (٢):

هل الأعداد ٤ ، ١٠ ، ١٦ تشكل تناسباً متسلسلاً ؟

الحـــل:

أ = ٤ ، ب = ١٠ ، جـ = ١٦

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$$

$$\frac{ب}{جـ} = \frac{١٠}{١٦} = \frac{٥}{٨}$$

بما أن $\frac{أ}{ب} \neq \frac{ب}{جـ}$

∴ الأعداد ٤ ، ١٠ ، ١٦ لا تشكل تناسباً متسلسلاً .

مثـــال (٣):

جد الوسط المتناسب الموجب بين العددين ٢ ، ٣٢

الحـــل:

افرض أنّ الوسط المتناسب هو ب

أ = ٢ ، جـ = ٣٢

∴ الأعداد ٢ ، ب ، ٣٢ تشكل تناسباً متسلسلاً .

∴ $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{٣٢}$

∴ $ب^٢ = ٦٤$ ∴ $ب = \sqrt{٦٤}$ ∴ ب = ± ٨

∴ الوسط المتناسب = ٨

مثـــال (٤):

إذا كان ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ ، في تناسب متسلسل جد $س^٢$ ص

الحـــــل:

بما أنّ ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ ، في تناسب متسلسل

∴ $\frac{٧}{س} = س \div \frac{١}{ص}$

$\frac{٧}{س}$ = س ص ، س (س ص) = ٧ (بالضرب التبادلي) ∴ $س^٢$ ص = ٧

ملاحظة :

إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د}$

وتكون ب وسط متناسب بين أ ، جـ وتكون جـ وسط متناسب بين ب ، د

تمرين (٤)

١) هل الأعداد التالية تشكل تناسباً متسلسلاً ؟

أ/ ٧ ، ١٤ ، ٢٨ ب/ ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٣٦

٢) جد الوسط المتناسب الموجب بين العددين :

أ/ ٣ ، ٢٧ ب/ ٧٥ ، ٤٨

٣) جد الوسط المتناسب بين الكميتين :

٩ $س^٢$ — ٢٥ $ص^٢$ ، $\frac{٣س + ٥ ص}{٣ س - ٥ ص}$

(٢–٥) المعدّل

نشاط (٣)

اختر أحد زملائك وليقم كلّ منكما بعدّ نبضات قلبه لمدة دقيقتين .

١/ ما عدد النبضات لكلّ منكما؟

٢/ اكتب نسبة عدد النبضات إلى عدد الدقائق في صورة كسر .

نلاحظ أنّ :

نسبة عدد النبضات إلى عدد الدقائق = $\frac{\text{١٤٠ نبضة}}{\text{٢ دقيقة}}$

نلاحظ أنّ الوحدتان (نبضة ، دقيقية) مختلفتان

تُسمّى النسبة التي تقارن بين كميتين لهما وحدتان مختلفتان **بالمعدّل** .

عند تبسيط المعدّل بحيث يصبح مقامه مساوياً للوحدة يُسمّى **معدّل الوحدة** $\frac{\text{٧٠ نبضة}}{\text{١ دقيقة}}$

[**لقياس نبضات القلب :** أضغط خفيف باستخدم أصبعي السبابة والوسطى على معصم اليد الأخرى بين العظم والوتر فوق الشريان الذي يقع جانب الإبهام في معصم اليد ، حيث عدد نبضات القلب الطبيعية تتراوح بين ٦٠ — ١٠٠ نبضة في الدقيقة]

هنالك بعض معدّلات الوحدة الشائعة :

المعدّل	معدّل الوحدة	الاختصار	الاسم
$\frac{\text{عدد الكيلومترات}}{\text{١ ساعة}}$	كيلو متر لكلّ ساعة	كلم/ ساعة	السرعة
$\frac{\text{عدد الجنيهات}}{\text{١ كيلوجرام}}$	جنيه لكلّ كيلو جرام	جنيه/ كجم	سعر الوحدة
$\frac{\text{عدد الكيلومترات}}{\text{١ لتر}}$	كيلو متر لكلّ لتر	كلم/ لتر	استهلاك الوقود

مثـــال (١):

عامل يومية يتقاضى ٣٥٠٠جنيه لقاء عمله ٧ ساعات فما معدّل أجرته في الساعة الواحدة؟

الحـــل:

٣٥٠٠ جنيه أجرة ٧ ساعات تُمثل بالكسر

$$\frac{\text{٣٥٠٠ جنيه}}{\text{٧ ساعة}} = \frac{\text{٣٥٠٠} \div \text{٧}}{\text{٧} \div \text{٧}} = \frac{\text{٥٠٠ جنيه}}{\text{١ ساعة}}$$

∴ معدّل أجرة العامل = ٥٠٠جنيه/ ساعة

(٥٠٠جنيه/ ساعة تُسمّى معدّل الوحدة)

مثـــال (٢):

تاجر قماش يبيع كل ٢,٥ متر بمبلغ ٤٠٠جنيه .

أ) جد معدّل الوحدة لسعر البيع .

ب) كم يدفع زبون إذا اشترى ٢٦ متر

الحـــل:

أ) معدّل سعر البيع $= \frac{\text{٤٠٠جنيه}}{\text{٢,٥ متر}}$

معدّل الوحدة لسعر البيع $= \frac{٤٠٠ \div ٢,٥}{٢,٥ \div ٢,٥} = \frac{\text{١٦٠جنيه}}{\text{١ متر}}$

معدّل الوحدة = ١٦٠ جنيه لكلّ متر = ١٦٠جنيه/متر

ب) لتحديد المبلغ الذي يدفعه الزبون إذا اشترى ٢٦ متر

نضرب معدّل الوحدة × عدد الأمتار التي يراد شراءها

∴ المبلغ الذي يدفعة الزبون $= \frac{\text{١٦٠جنيه}}{\text{١ } \cancel{\text{متر}}} \times \text{٢٦ } \cancel{\text{متر}} = \text{٤١٦٠ جنيه}$

مثـــال (٣):

إذا كان معدّل عدد الطلاب إلى عدد المعلمين بمدرسة ما هو $\frac{\text{٢٤ طالب}}{\text{٢ معلم}}$

جد :

أ) معدّل الوحدة .

ب) كم عدد الطلاب إذا كان عدد المعلمين ٣٤ معلم

الحـــل:

أ) معدّل عدد الطـــــــــــــــلاب إلى عدد المعلمين = $\dfrac{\text{٢٤ طالب}}{\text{٢ معلم}}$

معدّل الوحدة = $\dfrac{\text{٢٤ ÷ ٢}}{\text{٢ ÷ ٢}} = \dfrac{\text{١٢ طالب}}{\text{١ معلم}}$

∴ معدّل الوحدة هو ١٢ طالب/ معلم

ب) للحصول على عدد الطلاب بمدرسة بها ٣٤ معلم

نضرب معدّل الوحدة × عدد المعلمين

$\dfrac{\text{١٢ طالب}}{\text{١ }\cancel{\text{معلم}}} \times \text{٣٤ }\cancel{\text{معلم}} = \text{٤٠٨ طالب}$

مثـــال (٤):

الجدول أدناه يبين سعر ٣ قوارير مختلفة السعة من المشروبات الغازية . أرادت هبة شراء القارورة التي يكون فيها سعر الوحدة أقل ما يمكن . أيّ القوارير تشتري؟ ثم حدد المبلغ الذي تدفعه إذا اشترت قارورة سعتها ٢ لتر؟

سعر قارورة المشروب الغازي	
سعة القارورة (ملل)	السعر
١٠٠٠ ملل	٧٠٠ جنيه
٣٥٠ ملل	٣٠٠ جنيه
٢٥٠ ملل	٢٠٠ جنيه

الحـــــل:

القارورة التي سعتها ١٠٠٠ملل سعر الوحدة فيها

$$= \frac{\text{٧٠٠جنيه}}{\text{١٠٠٠ ملل}} = \frac{\text{٧٠٠} \div \text{١٠٠٠}}{\text{١٠٠٠} \div \text{١٠٠٠}} = \frac{\text{٠,٧جنيه}}{\text{١ ملل}}$$

∴ سعر الوحدة = ٠,٧ جنيه/ ملل

القارورة التي سعتها ٣٥٠ ملل سعر الوحدة فيها

$$= \frac{\text{٣٠٠جنيه}}{\text{٣٥٠ ملل}} = \frac{\text{٣٠٠} \div \text{٣٥٠}}{\text{٣٥٠} \div \text{٣٥٠}} = \frac{\text{٠,٨٦جنيه}}{\text{١ ملل}}$$

∴ سعر الوحدة = ٠,٨٦جنيه/ملل

القارورة التي سعتها ٢٥٠ملل سعر الوحدة فيها

$$= \frac{\text{٢٠٠جنيه}}{\text{٢٥٠ ملل}} = \frac{\text{٢٠٠} \div \text{٢٥٠}}{\text{٢٥٠} \div \text{٢٥٠}} = \frac{\text{٠,٨جنيه}}{\text{١ ملل}}$$

∴ سعر الوحدة = ٠,٨جنيه/ ملل

وبمقارنة سعر الوحدة لكلّ السعات من القوارير نجد أنّ سعر الوحدة للقارورة التي سعتها ١٠٠٠ ملل هو الأقل .

∴ سوف تشترى هبة القارورة التي سعتها ١٠٠٠ملل

ولتحديد المبلغ الذي سوف تدفعة عند شراء قارورة سعتها ٢ لتر .

نجد أنّ : ٢ لتر = ٢ × ١٠٠٠ملل = ٢٠٠٠ملل

$$\therefore \text{المبلغ} = \frac{\text{٠,٧جنيه}}{\text{١ }\cancel{\text{ملل}}} \times \text{٢٠٠٠}\cancel{\text{ملل}} = \text{١٤٠٠جنيه}$$

تمرين (٥)

١/ قطع آدم مسافة ٢٣٠كلم في ساعتين ونصف .

جد :

أ) معدّل المسافة التي يقطعها بالنسبة للزمن .

ب) معدّل الوحدة لسرعته .

جـ) إذا استمر بنفس السرعة فما المسافة التي يقطعها في ٥ ساعات .

٢/ تستخدم زينب ٣ قطع من الطماطم لكلّ ١,٥ لتر من الماء لعمل خليط الصلصة .

أ) كم لتر من خليط الصلصة تصنعه بعدد ١٤ قطعة من الطماطم .

ب) كم قطعة من الطماطم تستخدمها لصنع ٢ لتر من الصلصة .

٣/ قائمة أسعار السوق المركزي للفواكه كالآتي :

الفاكهة	الوزن	السعر
التفاح	٤كيلوجرام	٥٢٠٠ جنيه
المانجو	٥ كيلوجرام	٤٨٠٠ جنيه
الموز	٣ كيلو جرام	١٠٨٠ جنيه

أحسب سعر كل من الآتي :

أ) ٦ كيلو تفاح

ب) ٣ كيلو مانجو

جـ) سلة بها ٢كيلو موز و ٢ كيلو مانجو و ٣كيلو تفاح .

٤/ صندوق يحتوي على أقلام حبر جاف وأقلام رصاص بمعدّل ١٢ قلم جـاف لكلّ ١٨ قلم رصاص جد :

أ) معدّل الوحدة لعدد أقلام الحبر الجاف إلى أقلام الرصاص .

ب)كم عدد أقلام الحبر الجاف إذا كان عدد أقلام الرصاص ٣٣ قلم .

جـ)كم عدد أقلام الرصاص إذا كان عدد أقلام الحبر الجاف ٣٢ قلم .

٥/ بيّن ما إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين صحيحة دائماً أم صحيحة أحياناً أم غير صحيحة أبداً وأعط مثالاً أو مثالاً مضاداً

أ)كل نسبة هي معدّل .

ب)كل معدّل هو نسبة .

٦/ اكتب مثالاً من واقع الحياة توضّح فيه المعدّل

(٢– ٦) معدّل التغيّر

نشاط (٤) :

الجدول أدناه يبيّن عدد التلاميذ الذين تم قبولهم بإحدى المدارس بين عامي ٢٠١٧م و٢٠٢٠م

عدد التلاميذ الذين تم قبولهم		
عدد التلاميذ	١٥٢	١٧٠
السنة	٢٠١٧م	٢٠٢٠م

١) ما مقدار التغيّر في عدد التلاميذ الذين تم قبولهم بين عامي ٢٠١٧م و٢٠٢٠م ؟

٢) ما مقدار التغيّر في عدد السنوات ؟

٣) اكتب معدّلاً يقارن بين التغيّر في عدد التلاميذ والتغيّر في عدد السنوات . عبّر عنه في صورة معدّل وحدة ثم وضّح معناه .

نلاحظ مما سبق أنّ :

المعدّل الذي يقارن بين التغيّر في عدد التلاميذ خلال الأعوام ٢٠١٧م و٢٠٢٠م

$$= \frac{\text{التغير في عدد التلاميذ}}{\text{التغير في عدد السنوات}} = \frac{\text{(١٧٠ – ١٥٢)تلميذ}}{\text{(٢٠٢٠ – ٢٠١٧) سنة}}$$

$$= \frac{\text{١٨ تلميذ}}{\text{٣ سنوات}} = \frac{\text{٦ تلاميذ}}{\text{١ سنة}}$$

المعدّل ٦ تلاميذ/ سنة يُسمّى **معدل التغيّر**

تعريف:

معدّل التغيّر هو معدل يصف كيف تتغيّر كمية ما في علاقتها بكمية أخرى .

مثـــال (١) :

الجدول أدناه يوضّح طول محمد بالسنتمترات عندما كان عمره ٩ سنوات و١٣ سنة جد معدّل التغيّر في طوله خلال هذين العمرين .

الطول (سم)	١٣٥	١٥٥
العمر (سنة)	٩	١٣

الحـــل:

معدّل التغيّر في الطول خلال العمرين =

$$\frac{\text{التغيّر في الطول}}{\text{التغيّر في العمر}} = \frac{(١٥٥ - ١٣٥)\ \text{سم}}{(١٣ - ٩)\ \text{سنة}} = \frac{٢٠\ \text{سم}}{٤\ \text{سنة}} = \frac{٥\ \text{سم}}{١\ \text{سنة}}$$

∴ معدّل التغيّر في الطول خلال العمرين = ٥ سم/ سنة .

نلاحظ أنّ :

معدّل التغيّر (٥ سم/ سنة) وهو موجب لأن طول محمد يتزايد خــــلال عمره من ٩ سنوات إلى ١٣ سنة لذلك نسمي معدّل التغيّر من هذا النوع **معدّل التغيّر الموجب** .

مثـــال (٢) :

في أحد الأيام بلغت درجة الحرارة في الساعة الثانية ظهراً ٣٢ درجة مئوية ، وفي الساعة الثامنة مساءً بلغت ٢٠ درجة مئوية . جد معدّل تغيّر درجة الحرارة بالدرجات لكل ساعة .

الحــــل:

معدّل التغيّر في درجات الحرارة لكلّ ساعة =

$$\frac{\text{التغيّر في درجات الحرارة}}{\text{التغيّر في الساعات}} = \frac{\text{٢٠ − ٣٢}}{\text{٨ − ٢}} = \frac{\text{− ١٢}}{\text{٦}} = \frac{\text{− ٢ درجة مئوية}}{\text{١ ساعة}}$$

نلاحظ أنّ :

معدّل التغيّر (− ٢) درجة مئوية/ ساعة وهو سالب لأن درجة الحرارة تناقصت بين الساعة الثانية ظهراً والساعة الثامنة مساءً . لذلك نسمّي معدّل التغيّر من هذا النوع **معدّل التغيّر السالب** .

مثـــال (٣) :

بلغ عدد المشتركين في إحدى فروع شركات الاتصالات في شهر يناير ٢٧١ مشترك ، وفي شهر ابريل ٢٧١ مشترك . جد معدل التغيّر في عدد المشتركين لكلّ شهر .

الحــــل:

معدل التغيّر في عدد المشتركين لكلّ شهر =

$$\frac{\text{التغيّر في عدد المشتركين}}{\text{التغيّر في الشهور}} = \frac{\text{٢٧١ − ٢٧١}}{\text{٤ − ١}} = \frac{\text{صفر}}{\text{٣}} = \frac{\text{صفر مشترك}}{\text{١ شهر}}$$

نلاحظ أنّ :

معدّل التغيّر (صفر مشترك/ شهر) وهو صفري لأن عدد المشتركين لم يتغيّر بين شهري يناير وابريل لذلك نسمّي معدّل التغيّر من هذا النوع **معدّل التغيّر الصفري** .

تمرين (٦)

١) مزرعة للدواجن انتجت في عام ٢٠١١م ٦١٥ ألف بيضة وفي عام ٢٠١٥م كان إنتاجها ٨١٩ ألف بيضة . جد معدّل التغيّر في إنتاج البيض بين عامي ٢٠١١م و٢٠١٥م .

٢) الجدول المقابل يوضّح درجات غادة في ٦ اختبارات لمادة الرياضيات .

الاختبار	الدرجة
١	٣٤
٢	٣٨
٣	٣٩
٤	٤٠
٥	٣٩
٦	٢٦

جد

أ . معدّل التغيّر في الدرجات من الاختبار الأول إلى الرابع .

ب . معدّل التغيّر في الدرجات من الاختبار الثالث إلى الخامس .

جـ . معدّل التغيّر في الدرجات من الاختبار الثاني إلى السادس .

ثم حدّد نوع معدّل التغيّر في كل حالة .

٣) الجدول أدناه يوضّح عدد المرضى الداخلين لأحد المراكز الصحية .

عدد المرضى	٥٢٤	٥٦٢	٥٩٣
السنة	٢٠١٩م	٢٠٢٠م	٢٠٢١م

قارن بين معدّل التغيّر بين عامي ٢٠١٩م و٢٠٢٠م ومعدّل التغيّر بين عامي ٢٠٢٠م و٢٠٢١م ثم فسّر إجابتك .

٤) هل معدّل التغيّر في طول الشمعة التي تحترق بمرور الزمن موجب أم سالب ؟ وضّح إجابتك .

(٢– ٧) المعدّل الثابت للتغيّر

نشاط (٥) :

الجدول أدناه يوضّح عدد الخطوات التي يقطعها نزار كل دقيقة .

عدد الخطوات	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠
الزمن (الدقيقة)	١	٢	٣	٤

جد معدّل التغيّر في عدد الخطوات :

بين الدقيقة الأولى والثانية ، والدقيقة الثانية والثالثة ، والدقيقة الثالثة والرابعة .

ماذا تلاحظ على هذه المعدلات ؟

نلاحظ أن :

- معدّل التغيّر في عدد الخطوات بين الدقيقة الأولى والثانية =

$$\frac{(٤٠ - ٢٠) \text{ خطوة}}{(٢ - ١) \text{ دقيقة}} = \frac{٢٠ \text{ خطوة}}{١ \text{ دقيقة}} = ٢٠ \text{ خطوة/ دقيقة}$$

- معدّل التغيّر في عدد الخطوات بين الدقيقة الثانية والثالثة =

$$\frac{(٦٠ - ٤٠) \text{ خطوة}}{(٣ - ٢) \text{ دقيقة}} = \frac{٢٠ \text{ خطوة}}{١ \text{ دقيقة}} = ٢٠ \text{ خطوة/ دقيقة}$$

- معدّل التغيّر في عدد الخطوات بين الدقيقة الثالثة والرابعة =

$$\frac{(٨٠ - ٦٠) \text{ خطوة}}{(٤ - ٣) \text{ دقيقة}} = \frac{٢٠ \text{ خطوة}}{١ \text{ دقيقة}} = ٢٠ \text{ خطوة/ دقيقة}$$

بما أنّ : معدّل التغيّر بين أي نقطتين ثابت لذلك يُسمّى معدّل التغيّر في هذه الحالة **بمعدّل التغيّر الثابت** ويسمى المعدّل (٢٠ خطوة/ دقيقة) **بالمعدّل الثابت للتغيّر** .

مثـــال (١):

يقوم حافظ بطباعة مجموعة من الأسطر كل دقيقة كما هو موضّح في الجـدول أدناه .

عدد الأســـطر	٣	٦	٩
الزمن (الدقيقة)	١	٢	٣

هل معدّل التغيّر ثابتاً ؟ إذا كان كذلك جد المعدّل الثابت للتغيّر .

الحـــل:

- معدّل التغيّر في عدد الأسطر بين الدقيقة الأولى والثانية =

$$\frac{(\text{٦} - \text{٣})\ \text{سطر}}{(\text{٢} - \text{١})\ \text{دقيقة}} = \text{٣ سطر/ دقيقة}$$

+ ٣   + ٣

عدد الأســـطر	٣	٦	٩
الزمن (الدقيقة)	١	٢	٣

+ ١   + ١

- معدّل التغيّر في عدد الأسطر بين الدقيقة الثانية والثالثة =

$$\frac{(\text{٩} - \text{٦})\ \text{سطر}}{(\text{٣} - \text{٢})\ \text{دقيقة}} = \text{٣ سطر/ دقيقة}$$

بما أنّ : معدّل التغيّر في عدد الأسطر بين الدقيقة الأولى والثانية = معدّل التغيّر في عدد الأسطر بين الدقيقة الثانية والثالثة .

∴ معدّل التغيّر ثابتاً ، والمعدل الثابت للتغيّر = ٣ سطر/ دقيقة .

مثـــال (٢):

الجدول أدناه يوضّح تغيّر سعر السكر بالنسبة لوزنه . هل معدّل التغيّر ثابتاً ؟ إذا كان كذلك جد المعدّل الثابت للتغيّر .

السعر بالجنيه	الوزن بالكيلوجرام
٨٠٠	٢
١٦٠٠	٤
٢٣٠٠	٦

الحـــــل:

- معدل التغيّر في السعر من ٢ كيلوجرام إلى ٤ كيلوجرام

$$= \frac{(١٦٠٠ - ٨٠٠) \text{ جنيه}}{(٤ - ٢) \text{ كيلوجرام}} = \frac{٨٠٠ \text{ جنيه}}{٢ \text{ كيلوجرام}} = ٤٠٠ \text{ جنيه / كيلوجرام}$$

- معدل التغيّر في السعر من ٤ كيلوجرام إلى ٦ كيلوجرام

$$= \frac{(٢٣٠٠ - ١٦٠٠) \text{ جنيه}}{(٦ - ٤) \text{ كيلوجرام}} = \frac{٧٠٠ \text{ جنيه}}{٢ \text{ كيلوجرام}} = ٣٥٠ \text{ جنيه / كيلوجرام}$$

وبما أنّ :

٤٠٠ جنيه/ كيلوجرام $\neq$ ٣٥٠ جنيه/ كيلوجرام

∴ معدّل التغيّر غير ثابت .

تمرين (٧)

١) الجدول أدناه يوضّح كمية الدهان اللازم لطلاء عدد من الغرف .

هل معدّل تغيّر عدد علب الدهان بالنسبة لعدد الغرف ثابتاً ؟

إذا كان كذلك جد المعدّل الثابت للتغيّر .

عدد الغرف	عدد علب الدهان
٣	٤
٦	٨
٩	١٢

٢) الجدول أدناه يوضّح المبالغ المتبقية بالجنيه بعد شراء عدد من الأدوات .

هل معدّل التغيّر ثابتاً ؟

إذا كان كذلك جد المعدّل الثابت للتغيّر .

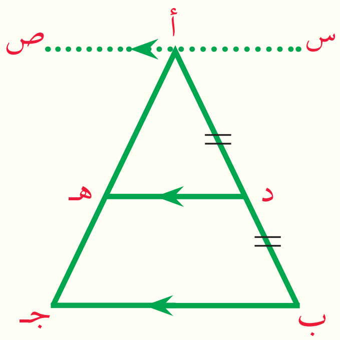
عدد الأدوات	المتبقي (الجنيه)
٥	٢٦٠٠
١٠	٢٠٠٠
١٥	١٤٠٠
٢٠	١٠٠٠

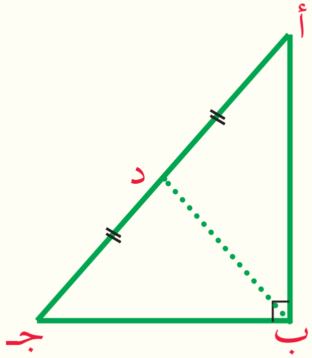
٣) اوجد المعدّل الثابت للتغيّر في الزمن الذي يستغرقه عدد من العمال لانجاز عمل معيّن . ثم فسّر معناه .

عدد العمال	الزمن (الساعة)
٢٤	٣
٢٠	٥
١٦	٧

الوحدة الثالثة

٣ القواطع والمتوسطات



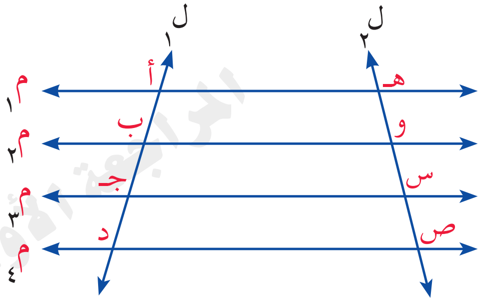


(٣ – ١) القطع المتساوية

نشاط (١) :

١/ أرسم عدة مستقيمات متوازية م$_{١}$ ، م$_{٢}$ ، م$_{٣}$ ، م$_{٤}$ ثم ارسم المستقيم ل$_{١}$ قاطعاً لها في أ ، ب ، جـ ، د بحيث $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

٢/ ارسم المستقيم ل$_{٢}$ قاطعاً آخر لهذه المستقيمات المتوازية ويقطعها في هـ ، و ، س ، ص .



٣/ قس طول القطع $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{و س}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ ثم قارن بين أطوالها . ماذا تلاحظ؟

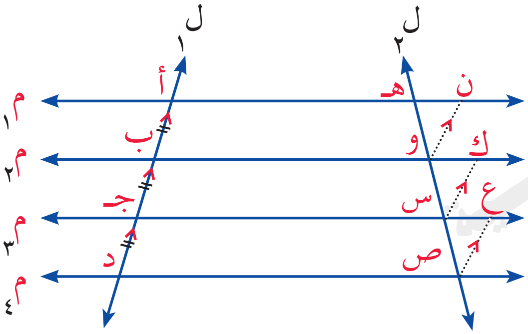
مما سبق يمكن التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (١)

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية (ثلاث أو أكثر) وكانت القطع المحصورة بين المستقيمات المتوازية متساوية ، فإن القطع المحصورة بين هذه المستقيمات المتوازية لأي قاطع آخر تكون متساوية .

البرهان النظري :

المعطيات :



م$_{١}$ // م$_{٢}$ // م$_{٣}$ // م$_{٤}$

$\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

ل$_{٢}$ قاطع آخر

المطلوب اثباته :

$\overline{\text{هـ و}}$ = $\overline{\text{و س}}$ = $\overline{\text{س ص}}$

العمل :

من و ، س ، ص أرسم مستقيمات موازية للمستقيم ل$_{١}$ ليلاقي امتدادات $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{جـ س}}$ في ن ، ك ، ع على الترتيب .

البرهان :

$\overline{\text{أ ن}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ (معطى) .

$\overline{\text{ن و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ (عملاً) .

∴ الشكل أ ب و ن متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويان)

∴ $\overline{\text{ن و}}$ = $\overline{\text{أ ب}}$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أنّ :

$\overline{\text{ك س}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$

ولكن $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{ن و}}$ = $\overline{\text{ك س}}$

في Δ ن هـ و ، Δ ك و س

$\overline{\text{ن و}}$ = $\overline{\text{ك س}}$ (بالبرهان)

∢ ن هـ و = ∢ ك و س (بالتناظر $\overline{\text{ن هـ}}$ // $\overline{\text{ك و}}$)

∢ ن و هـ = ∢ ك س و (بالتناظر $\overline{\text{ن و}}$ // $\overline{\text{ك س}}$)

∴ المثلثان Δ ن هـ و ، Δ ك و س متطابقان (ض ، ز ، ز)

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ = $\overline{\text{و س}}$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن :

$\overline{\text{و س}}$ = $\overline{\text{س ص}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ = $\overline{\text{و س}}$ = $\overline{\text{س ص}}$

نتيجة:

إذا قطع قاطعان عدة مستقيمات ، وكانت القطع المحصورة بين القاطع الأول وهذه المستقيمات متساوية وكذلك القطع المحصورة بين القاطع الثاني وهذه المستقيمات متساوية تكون المستقيمات متوازية .

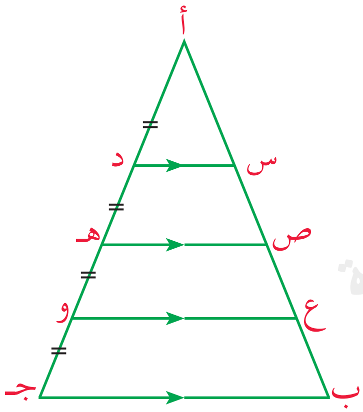
تمرين (١)

١/ في الشكل المجاور

$\overline{\text{ع ب}}$ = ٤سم

جد طول :

$\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{ص ب}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

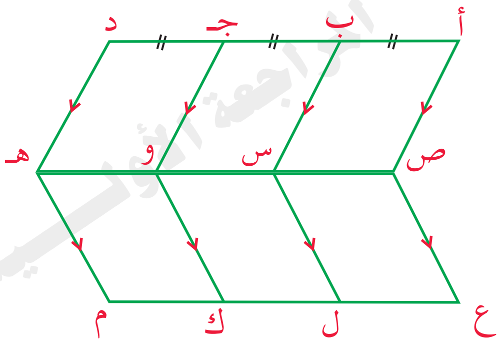


٢/ في الشكل أدناه

$\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

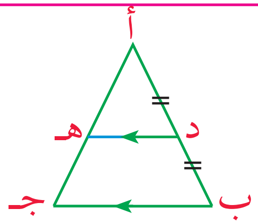
أثبت أن :

$\overline{\text{ع ل}}$ = $\overline{\text{ل ك}}$ = $\overline{\text{ك م}}$



(٣ – ٢) نظرية (٢)

نشاط (٢)



١/ أرسم مثلث أ ب جـ

٢/ ضع النقطة د على الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$

٣/ من د ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ موازياً للضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ ليقطع الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$ عند النقطة هـ

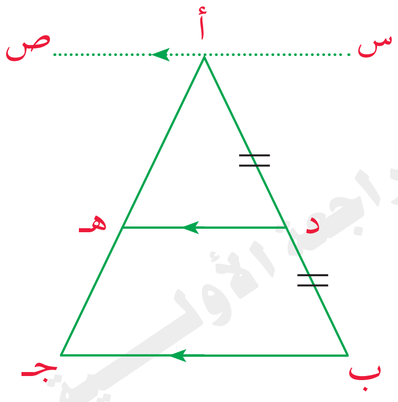
٤/ قس $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$ وقارن بينهما في الطول ماذا تلاحظ؟

مما سبق يمكن التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (٢)

المستقيم المرسوم من منتصف أحد أضلاع المثلث موازياً ضلعاً آخر فيه ينصف الضلع الثالث .

البرهان النظري :



المعطيات :

Δ أ ب جـ فيه

$\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب إثباته

$\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$

العمل :

ارسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويمر بالنقطة أ

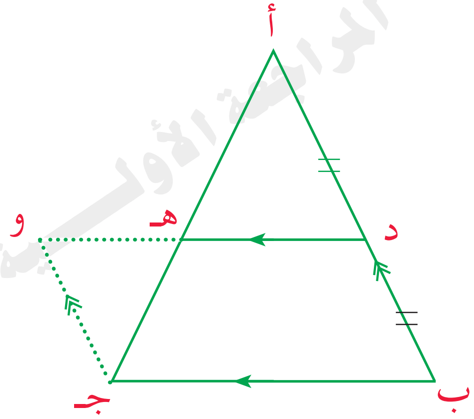
البرهان :

$\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

$\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ قطعت قطعاً متساوية على القاطع $\overline{\text{أ ب}}$ فإنها تقطع قطعاً متساوية على القاطع $\overline{\text{أ جـ}}$.

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$



برهان آخر :

المعطيات :

Δ أ ب جـ فيه

$\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب إثباته :

$\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$

العمل :

ارسم $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ ليلاقي امتداد $\overline{\text{د هـ}}$ في و

البرهان :

$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى) ∴ $\overline{\text{د و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

$\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ (عملاً)

∴ الشكل ب جـ و د متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويان)

∴ $\overline{\text{جـ و}}$ = $\overline{\text{ب د}}$

وبما أنّ $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{جـ و}}$

في Δ أ د هـ ، Δ هـ و جـ

$\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{جـ و}}$ (بالبرهان)

∢ أ هـ د = ∢ و هـ جـ (تقابل بالرأس)

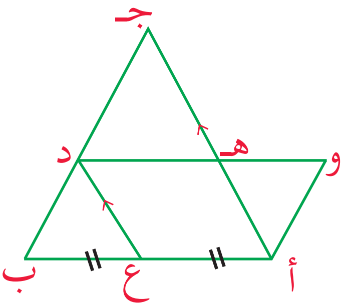
∢ د أ هـ = ∢ هـ جـ و (بالتبادل)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ز)

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$

مثـــال:

في الشكل المقابل



أ ب د و متوازي أضلاع

ع منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

$\overline{\text{ع د}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

أثبت أنّ : $\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{و أ}}$

البرهان :

في Δ أ ب جـ ، ع منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)

$\overline{\text{ع د}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$ (نظرية) (١)

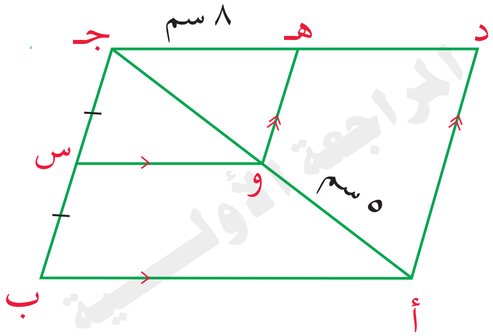
أ ب د و متوازي أضلاع (معطى)

∴ $\overline{\text{و أ}}$ = $\overline{\text{د ب}}$ (ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع) (٢)

من (١) و (٢)

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{و أ}}$

تمرين (٢)



١) في الشكل المقابل

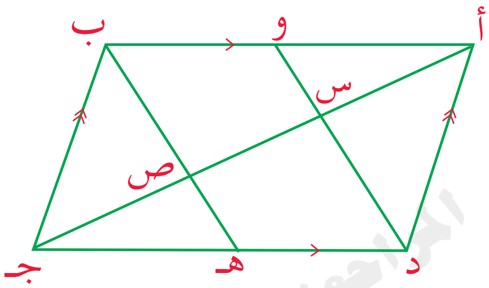
$\overline{\text{جـ س}}$ = $\overline{\text{س ب}}$

$\overline{\text{أ و}}$ = ٥ سم ، $\overline{\text{هـ جـ}}$ = ٨ سم

جد أطوال :

$\overline{\text{و جـ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$

٢) في الشكل أدناه



أ ب جـ د متوازي أضلاع

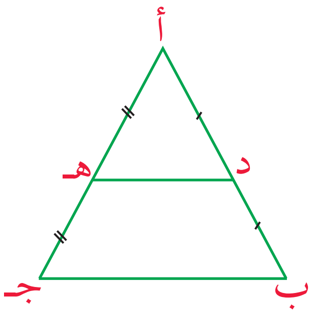
و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

هـ منتصف $\overline{\text{د جـ}}$

أثبت أن : $\overline{\text{أ س}}$ = $\overline{\text{س ص}}$ = $\overline{\text{ص جـ}}$

(٣-٣) نظرية (٣)

نشاط (٣) :



١) ارسم مثلث أ ب جـ

٢) ضع النقطة د على الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د ب}}$

٣) ضع النقطة هـ على الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث $\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$

٤)صل $\overline{\text{د هـ}}$

٥) بواسطة المسطرة والمثلث اختبر هل $\overline{\text{د هـ}}$ يوازي $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟

٦) قس طول $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ وقارن بين طوليهما ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن التوصل إلى النظرية التالية :

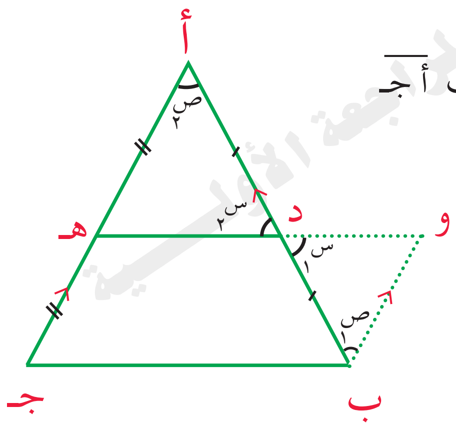
نظرية (٣) :

المستقيم الذي يصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه .

البرهان النظري :

المعطيات :

Δ أ ب جـ فيه د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$



المطلوب اثباته :

١) $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

٢) $\overline{\text{د هـ}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{ب جـ}}$

العمل :

من ب ارسم $\overline{\text{ب و}}$ // $\overline{\text{جـ أ}}$ ليلاقي امتداد $\overline{\text{هـ د}}$ في و .

البرهان :

في Δ ب و د ، Δ أ د هـ

س$_1$ = س$_2$ (التقابل بالرأس)

ص$_1$ = ص$_2$ (بالتبادل)

$\overline{\text{ب د}}$ = $\overline{\text{د أ}}$ (معطى)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ز)

∴ $\overline{\text{ب و}}$ = $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{و د}}$ = $\overline{\text{دهـ}}$

ولكن $\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{جـ هـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{ب و}}$ = $\overline{\text{جـ هـ}}$

ولكن $\overline{\text{ب و}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$ (عملاً)

∴ الشكل و ب جـ هـ متوازي أضلاع (ضلعان متقابلان متوازيان متساويان)

∴ $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ وذلك يعني أن $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

وكذلك $\overline{\text{و هـ}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ (ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع)

ولكن $\overline{\text{و د}}$ = $\overline{\text{د هـ}}$ (بالبرهان)

∴ $\overline{\text{د هـ}}$ = $\frac{1}{2}$ $\overline{\text{و هـ}}$ = $\frac{1}{2}$ $\overline{\text{ب جـ}}$ (٢)

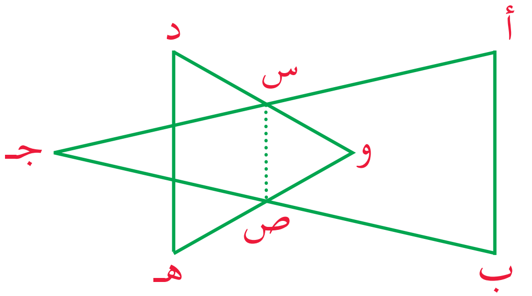
مثـــال:

في الشكل المقابل :

س منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{د و}}$

ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$

اثبت أن : $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{د هـ}}$



الحـــل:

المعطيات :

س منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{د و}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$

المطلوب اثباته : $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{د هـ}}$

العمل : صل $\overline{\text{س ص}}$

البرهان :

في Δ أ ب جـ

س منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (معطى) ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{أ ب}}$ (نظرية) (١)

في Δ د هـ و

س منتصف $\overline{\text{د و}}$ (معطى) ، ص منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{د هـ}}$ (نظرية) (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{1}{2}\,\overline{\text{أ ب}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{د هـ}}$ $\therefore$ $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{د هـ}}$

تمرين (٣)

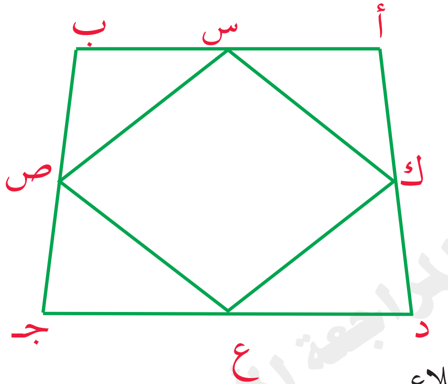
١) في الشكل المقابل :

س ، ص ، ع ، ك منصفات الأضلاع

في الرباعي أ ب جـ د

اثبت أن : الشكل س ص ع ك متوازي أضلاع

(ارشاد : صل أ جـ)

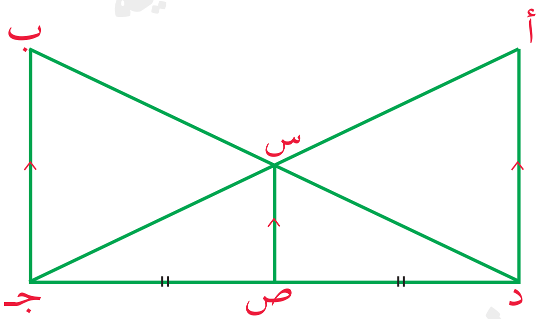


٢) في الشكل المقابل :

أ د // س ص // ب جـ

د ص = ص جـ

اثبت أن : أ د = ب جـ

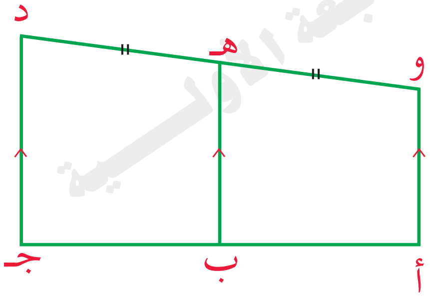


٣) في الشكل المقابل :

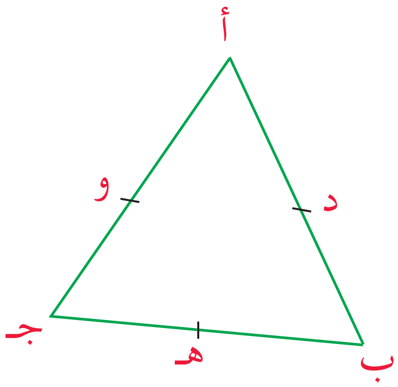
أ و // ب هـ // جـ د

و هـ = هـ د

اثبت أنّ : هـ ب = $\frac{1}{2}$ (أ و + جـ د)



٤) في الشكل المقابل :



د منتصف أ ب

هـ منتصف ب جـ

و منتصف أ جـ

اثبت أن :

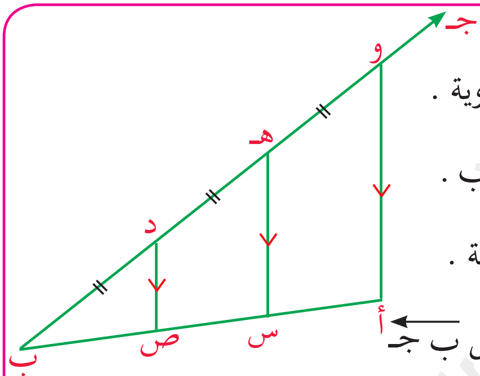
الرباعي أ د هـ و متوازي أضلاع .

٥) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ، هـ منتصف ب جـ ، و نقطة على أ ب ، د نقطة على أ جـ حيث د هـ // أ ب ، و د // ب جـ .

اثبت أن و ب هـ د معين .

(٣-٤) تقسيم قطعة مستقيمة إلى عدة قطع متساوية

نشاط (٤):



قسّم القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ إلى ٣ قطع متساوية .

١) ارسم القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ بطول مناسب .

٢) من ب ارسم الشعاع $\overrightarrow{ب جـ}$ بزاوية مناسبة .

٣) استخدم البرجل وبفتحة مناسبة اقطع على $\overrightarrow{ب جـ}$

بادئاً من ب ٣ قطع متساوية $\overline{ب د}$ = $\overline{د هـ}$ = $\overline{هـ و}$ ثم صل $\overline{و أ}$.

٤) مستعملاً المسطرة والمثلث ارسم القطع $\overline{هـ س}$ ، $\overline{د ص}$ موازية للقطعة المستقيمة $\overline{و أ}$ لتقطع $\overline{أب}$ في س ، ص .

$\overline{أ س}$ ، $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص ب}$ هي القطع المتساوية المطلوبة .

البرهان :

بما أن المستقيمات المتوازية $\overleftrightarrow{و أ}$ ، $\overleftrightarrow{هـ س}$ ، $\overleftrightarrow{د ص}$ قطعت قطعاً متساوية على القاطع $\overline{ب جـ}$ فإنها تقطع قطعاً متساوية على القاطع $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{أ س}$ = $\overline{س ص}$ = $\overline{ص ب}$

تمرين (٤)

١) ارسم $\overline{أ ب}$ = ٨ سم ثم قسمه إلى ٤ قطع متساوية بالبرجل ثم تحقق من دقة العمل بالقياس .

٢) ارسم $\overline{ب جـ}$ = ١٢ سم ثم قسمه إلى ٥ قطع متساوية بالبرجل ثم تحقق بالقياس .

(٣-٥) المتوسطات

تعريف:

المتوسط في المثلث هو المستقيم الذي يصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل .

نشاط (٥) :

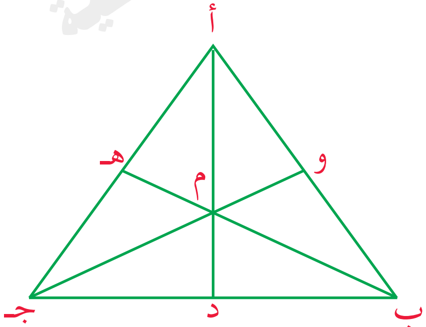
١) ارسم مثلث أ ب جـ .

٢) صل كل رأس في المثلث بمنتصف الضلع المقابل له .

٣) كم عدد متوسطات المثلث أ ب جـ ؟

نظرية (٤) :

نشاط (٦) :



١) ارسم Δ أ ب جـ .

٢) من أ ارسم المتوسط أ د

ومن ب ارسم المتوسط ب هـ

ومن جـ ارسم المتوسط جـ و

٣) هل متوسطات المثلث أ ب جـ تتقاطع في نقطة واحدة ؟

٤) قس طول أ م ، م د ثم قارن بين طوليهما ماذا تلاحظ ؟

٥) قس طول ب م ، م هـ ثم قارن بين طوليهما ماذا تلاحظ ؟

٦) قس طول جـ م ، م و ثم قارن بين طوليهما ماذا تلاحظ ؟

إذا كان رسمك دقيقاً ستجد أنّ :

١) متوسطات المثلث أ ب جـ تتقاطع في نقطة واحدة .

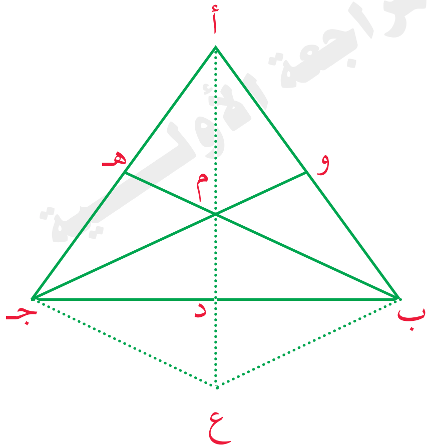
٢) $\overline{\text{أ م}}$ = ٢ $\overline{\text{م د}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ = ٢ $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$ = ٢ $\overline{\text{م و}}$ وهذا يقودنا إلى النظرية التالية .

نظرية (٤) :

١) متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

٢) نقطة تقاطع المتوسطات تقسّم المتوسط من جهة الرأس بنسبة ٢ : ١

البرهان النظري :



المعطيات :

Δ أ ب جـ فيه و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

المتوسطان $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$ يتقاطعان في م

المطلوب اثباته :

إذا مدّ أ م وقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د فإن :

١) $\overline{\text{ب د}}$ = $\overline{\text{د جـ}}$

٢) $\overline{\text{أ م}}$: $\overline{\text{م د}}$ = ٢ : ١

العمل :

مد أ م د إلى ع بحيث $\overline{\text{أ م}}$ = $\overline{\text{م ع}}$

صل $\overline{\text{ب ع}}$ ، $\overline{\text{جـ ع}}$

البرهان :

لاثبات (١) :

في Δ أ ب ع

و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى) ، م منتصف $\overline{\text{أ ع}}$ (بالعمل)

$\therefore$ $\overline{\text{و م}}$ // $\overline{\text{ب ع}}$ (نظرية)

ولكن $\overline{\text{م جـ}}$ امتداد لـ $\overline{\text{و م}}$

$\therefore$ $\overline{\text{م جـ}}$ // $\overline{\text{ب ع}}$ (١)

في Δ أ جـ ع

هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (معطى) ، م منتصف $\overline{\text{أ ع}}$ (بالعمل)

$\therefore$ $\overline{\text{م هـ}}$ // $\overline{\text{ع جـ}}$ (نظرية)

ولكن $\overline{\text{ب م}}$ امتداد لـ $\overline{\text{م هـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ب م}}$ // $\overline{\text{ع جـ}}$ (٢)

من (١) و (٢)

الشكل ب م جـ ع متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان)

$\therefore$ $\overline{\text{ب د}}$ = $\overline{\text{د جـ}}$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

لاثبات (٢) :

$\overline{م د} = \overline{د ع}$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

$\therefore \overline{م د} = \frac{١}{٢} \overline{م ع}$

ولكن $\overline{م ع} = \overline{أ م}$ (عملاً)

$\therefore \overline{م د} = \frac{١}{٢} \overline{أ م}$ $\therefore \overline{أ م} = ٢ \overline{م د}$

$\therefore \frac{\overline{أ م}}{\overline{م د}} = ٢ = \frac{٢}{١}$

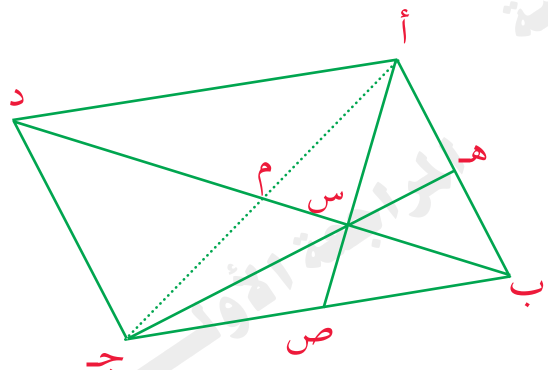
$\therefore \overline{أ م} : \overline{م د} = ٢ : ١$

مثـــال :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{هـ جـ}$ يقطع $\overline{ب د}$ في س ، امتداد $\overline{أ س}$ يقطع $\overline{ب جـ}$ في ص .

اثبت أن : ص منتصف $\overline{ب جـ}$

الحـــــل:



المعطيات :

أ ب جـ د متوازي أضلاع

هـ منتصف $\overline{أ ب}$

المطلوب اثباته :

$\overline{ب ص} = \overline{ص جـ}$

العمل : صل $\overline{أ جـ}$ ليقطع $\overline{ب د}$ في م

البرهان : في Δ أ ب جـ

هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)

م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

∴ $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ متوسطان ويتقاطعان في س

∴ س نقطة تقاطع المتوسطات

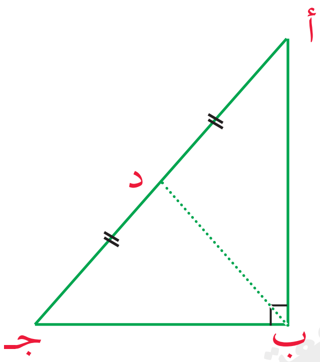
∴ أ س ص هو المتوسط الثالث

∴ ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ب ص}}$ = $\overline{\text{ص جـ}}$

نظرية (٥) :

نشاط (٧) :



١) ارسم Δ أ ب جـ فيه ∠ ب = ٩٠°

٢) عيّن النقطة د على الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$

بحيث $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د جـ}}$

٣) من الرأس ب ارسم المتوسط $\overline{\text{ب د}}$

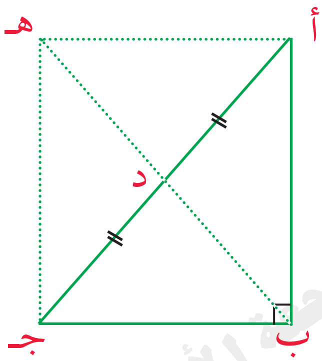
٤) قس طول $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ثم قارن بينهما ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (٥) :

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس الزاوية القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث .

البرهان النظري :



المعطيات : Δ أ ب جـ فيه $\measuredangle$ ب = ٩٠°

$\overline{\text{ب د}}$ متوسط في Δ أ ب جـ

المطلوب اثباته : $\overline{\text{ب د}} = \frac{١}{٢}\ \overline{\text{أ جـ}}$

العمل : مد $\overline{\text{ب د}}$ إلى هـ بحيث $\overline{\text{ب د}} = \overline{\text{د هـ}}$

البرهان : بما أن الشكل أ ب جـ هـ فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف كل منهما الآخر

$\therefore$ الشكل أ ب جـ هـ متوازي أضلاع

بما أن $\measuredangle$ ب = ٩٠° $\therefore$ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

$\therefore$ $\overline{\text{ب هـ}} = \overline{\text{أ جـ}}$

بما أن $\overline{\text{ب د}} = \frac{١}{٢}\ \overline{\text{ب هـ}}$ $\therefore$ $\overline{\text{ب د}} = \frac{١}{٢}\ \overline{\text{أ جـ}}$

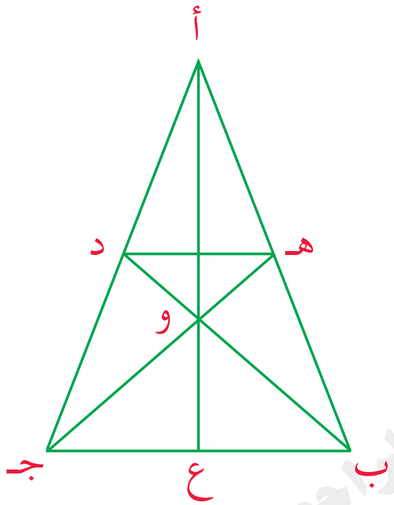
نتيجة:

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة .

■ برهن النتيجة السابقة .

تمرين (٥)

١) في الشكل المقابل :



Δ أ ب جـ فيه :

هـ منتصف أ ب ، د منتصف أ جـ

ع منتصف ب جـ

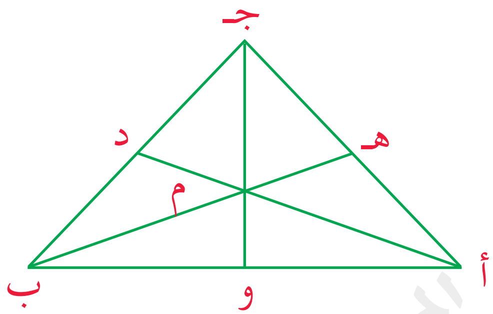
إذا كان ب د = ٣,٦ سم

جـ و = ٣ سم ، و ع = ١,٧ سم

ب جـ = ٤ سم ، جد الآتي :

أ) و د   ب) و هـ   جـ) أ و   د) هـ د   هـ) ب ع

٢) في الشكل المقابل :



أ د ، ب هـ ، جـ و متوسطات

المثلث أ ب جـ تتقاطع في م

اثبت أن :

م نقطة تقاطع متوسطات المثلث د هـ و

٣) ع نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ فإذا كان أ ع = ب جـ

أثبت أن : ∠ ب ع جـ = ٩٠°

٤) أ ب جـ مثلث مدّ ب جـ إلى د بحيث ب جـ = جـ د

هـ نقطة على أ جـ بحيث أ هـ = ٢ هـ جـ ، اثبت أن امتداد د هـ ينصف أ ب

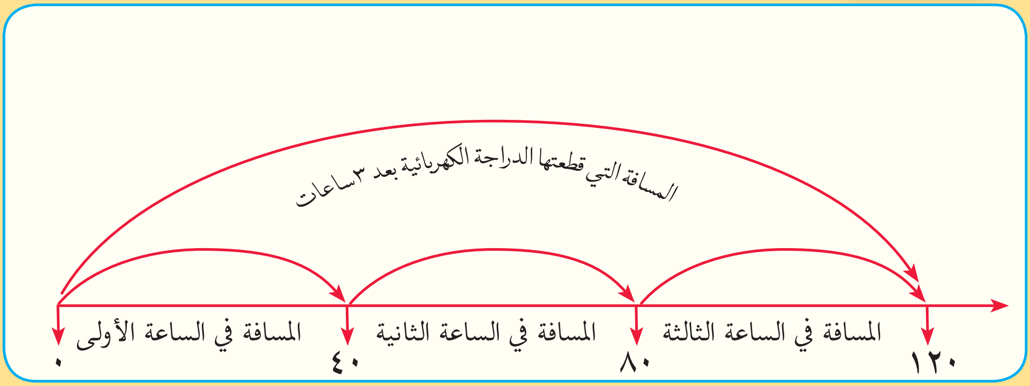
٥) ارسم Δ أ ب جـ الذي فيه الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ = ٧ سم والمتوسط $\overline{\text{ب د}}$ = ٧,٥ سم والمتوسط $\overline{\text{جـ هـ}}$ = ٩ سم

٦) اثبت أن : في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر .

الوحدة الرابعة

٤

الحركة



تمهيد :

إذا انتقلت من منزلك إلى المدرسة فإنك تقطع مسافة ما من المنزل إلى المدرسة أي إنّك تحركت وهذه الحركة تتم في زمن معيّن .

وصف الحركة :

إذا لم يتحرّك جسم من مكانه بمرور الزمن فهذا يعني أنّه ساكن أي ثابت وكثير من الأجسام ساكنة لا تتحرّك كأعمدة الكهرباء والمنازل وغيرها .

أما إذا انتقل أي جسم من نقطة ثابتة إلى أخرى فقد تحرّك .

إذن الحركة هي تغيّر موضع الجسم من نقطة ثابتة إلى نقطة أخرى في زمن معيّن .

(٤–١) السرعة

تعرّفنا في الوحدة الثانية المعدّل وهو المقارنة بين كميتين من نوعين مختلفين وبناءً عليه يمكن تعريف السرعة على أنّها معدّل المسافة المقطوعة خلال الزمن أي أنّ :

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

وتقاس السرعة بوحدة الكيلومتر/ الساعة وتختصر كلم/ ساعة أو الميل/ الساعة .

مثــــال: (١) :

قطعت سيارة مسافة ١١٠ كيلومتر تقريباً من الكاب إلى أبوحمد في ساعتين . جد سرعتها .

الحــــل:

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{١١٠}{٢} = ٥٥ \text{ كلم/ ساعة}$$

مثــــال: (٢) :

قطع يحيى مسافة ٣٢٠ متراً في ٨ دقائق كم سرعته بالأمتار في الدقيقة .

الحــــل:

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٣٢٠}{٨} = ٤٠ \text{ متر/ دقيقة}$$

تمرين (١)

١) قطع قطار مسافة ٢١٠ كيلومتر في ٣ ساعات . كم تكون سرعته ؟

٢) مشى رجل مسافة ٥٠ متراً في ٢٥ ثانية جد سرعته بالأمتار في الثانية .

٣) قطعت سيارة مسافة ٤٢٠ كيلومتر في ٤ ساعات جد سرعتها :

أ . بالكيلومتر في الساعة .

ب . بالمتر في الدقيقة .

٤) يقطع راكب دراجة نارية مسافة ١٠٠٠ متر في الدقيقة كم سرعته في الساعة ؟

٥) أيهما أسرع سيارة تقطع مسافة ٤٩٢ كيلومتر في ٦ ساعات أم سيارة تقطع مسافة ٤١٥ كيلومتر في ٥ ساعات ؟

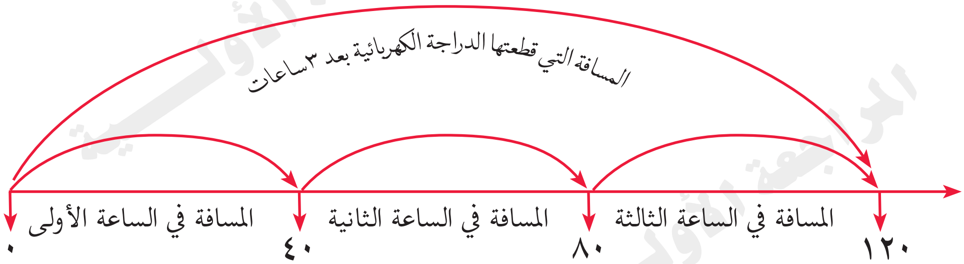
(٤–٢) العلاقة بين المسافة والسرعة والزمن

المسافة :

إذا كانت سرعة دراجة كهربائية ٤٠ كيلومتر في الساعة

- بعد ساعة تكون قد قطعت مسافة ٤٠ كيلومتر .
- بعد ساعتين تكون قد قطعت مسافة ٢ × ٤٠ = ٨٠ كيلومتر .
- بعد ٣ ساعات تكون قد قطعت مسافة ٣ × ٤٠ = ١٢٠ كيلومتر .

مما سبق والشكل أدناه ماذا تلاحظ؟



نلاحظ أنّ :

المسافة في ساعة واحدة = ١ × ٤٠ أي الزمن × السرعة

المسافة في ساعتين = ٢ × ٤٠ أي الزمن × السرعة

المسافة في ٣ ساعات = ٣ × ٤٠ أي الزمن × السرعة

ما المسافة التي تقطعها الدراجة الكهربائية في ٦ ساعات ؟

عليه نستنتج أنّ :

$$\boxed{\text{المسافة = الزمن × السرعة}}$$

مثـــال: (١) :

سيارة سرعتها ٩٠ كيلومتر في الساعة ، سارت لمدة ٤ ساعات . كم المسافة التي قطعتها ؟

الحــــل:

المسافة = الزمن × السرعة

= ٤ × ٩٠ = ٣٦٠ كيلومتر

∴ المسافة التي قطعتها في ٤ ساعات = ٣٦٠ كيلومتر

الزمن :

بما أنّ السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

بالضرب التبادلي نجد أنّ :

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

مثـــال: (٢) :

قطار سرعته ٨٠ كلم/ ساعة في كم من الزمن يقطع مسافة :

أ) ٤٠٠ كيلومتر ب) ٩٦٠ كيلومتر

الحــــل:

أ) الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{٤٠٠}{٨٠}$ = ٥ ساعات

ب)الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{٩٦٠}{٨٠}$ = ١٢ ساعة

تمرين (٢)

١) جرار سرعته ٥٠ كلم/ ساعة . ما المسافة التي يقطعها في :

أ) ٣ ساعات　　　　　ب) ١٥ دقيقة

٢) كم الزمن الذي يستغرقه الياس ليقطع مسافة ٤٥٠ متر إذا كانت سرعته ٥٠ متر في الدقيقة؟

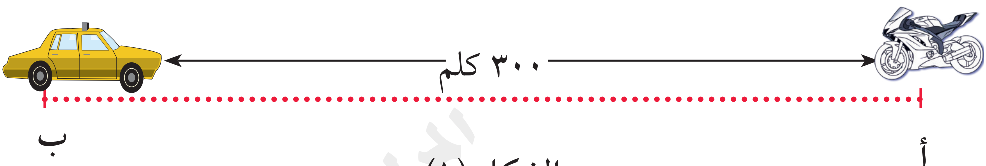
٣) جد الزمن الذي تستغرقه باخرة لتقطع ١٠٦٤ كيلومتر إذا كانت سرعتها ١٤ كيلومتر في الساعة .

٤) طائرة سرعتها ٠,١٥ كيلومتر في الثانية . كم المسافة التي تقطعها في الدقيقة ؟

٥) تحرّك خليل الساعة العاشرة صباحاً من قريته قاصداً قرية مجاورة تبعد ١٥ كلم عن قريته وبعد ساعة تحرّكت سيارة قاصدة نفس القرية فإذا وصلا معاً الساعة الحادية عشرة ونصف فكم تكون سرعة كل من خليل والسيارة ؟

(٤–٣) سرعة الاقتراب

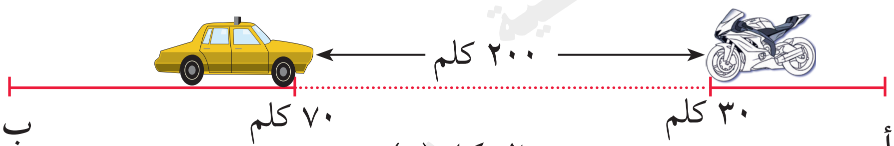
إذا كان البعد بين مدينتين أ ، ب ٣٠٠ كلم ، قام راكب دراجة نارية من المدينة أ بسرعة ٣٠ كلم/ ساعة قاصداً المدينة ب وفي نفس الوقت قامت سيارة من المدينة ب قاصدة المدينة أ بسرعة ٧٠ كلم/ ساعة فبعد كم من الزمن يلتقيان ، وكم يكون بعدهما من المدينة أ وبعدهما من المدينة ب حينئذٍ ؟



الشكل (١)

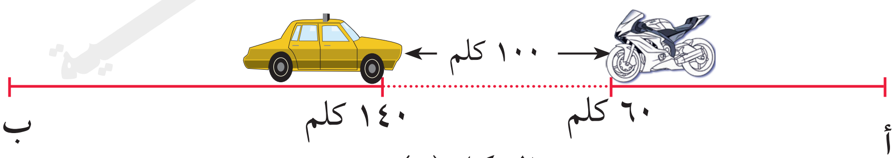
الشكل (١) يوضّح الدراجة النارية والسيارة عند نقطتي البداية وبعد أن تسير كل منهما ساعة واحدة تكون الدراجة قد قطعت ٣٠ كلم والسيارة ٧٠ كلم .

أي انّهما قطعا معاً مسافة ١٠٠ كلم وهي (٣٠ + ٧٠) كلم وصارت المسافة بينهما ٢٠٠ كلم (٣٠٠ – ١٠٠) كلم كما في الشكل (٢)



الشكل (٢)

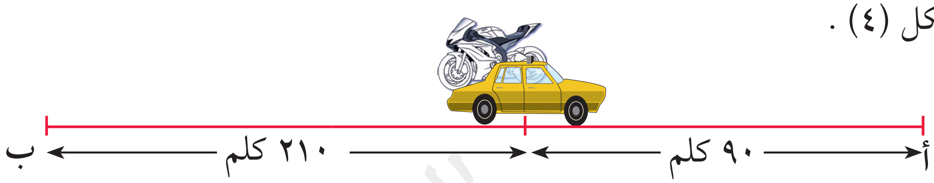
وبعد ساعة أخرى أي بعد ساعتين من قيامهما يكون الوضع كما في الشكل (٣)



الشكل (٣)

وعندها تكون الدراجة النارية قد قطعت مسافة ٣٠ كلم أخرى وقطعت السيارة مسافة ٧٠ كلم أخرى وقطعا معاً خلال الساعة الثانية مسافة ١٠٠ كلم وبذلك تكونان قد قطعتا معاً مسافة ٢٠٠ كلم (٢ × ١٠٠) كلم في الساعتين وبقيت بينهما مسافة ١٠٠ كلم (٣٠٠ − ٢٠٠) كلم .

وبعد ساعة أخرى أي بعد ثلاث ساعات من قيامهما يكون الوضع كما موضّح في الشكل (٤) .



الشكل (٤)

وعند ذلك تكون الدراجة النارية قد قطعت مسافة ٣٠ كلم أخرى وقطعت السيارة مسافة ٧٠ كلم أخرى فتكونان قد التقيا بعد ٣ ساعات من قيامهما ويكون بعدهما من المدينة أ ٩٠ كلم أي (٣ × ٣٠) كلم ، وبعدهما من المدينة ب ٢١٠ كلم (٣ × ٧٠) كلم .

نلاحظ أنّ :

الدراجة النارية والسيارة تقطعان معاً مسافة ١٠٠ كلم في الساعة الواحدة من المسافة بينهما والتي ستقطعانها معاً لتلتقيا وهذه المسافة التي تقتربان بها في كل ساعة هي عبارة عن مجموع سرعتيهما ، وبذلك يمكن أن نقول انّ السرعة التي تقتربان بها من بعضيهما هي مجموع سرعتيهما وهذه السرعة تُسمّى **سرعة الاقتراب** .

إذا سار جسمان نحو بعضهما فإن سرعة اقترابهما من بعضهما

تساوي مجموع سرعتيهما .

سرعة الاقتراب = مجموع السرعتين

- كم الزمن الذي استغرقتانه كل من الدراجة النارية والسيارة لتلتقيان ؟

نلاحظ أنّ :

الزمن الذي استغرقتاه للالتقاء = $\frac{٣٠٠}{١٠٠}$ = ٣ ساعات

أي أنّ :

زمن الاقتراب (زمن الالتقاء) = $\frac{\text{المسافة بينهما}}{\text{مجموع السرعتين}}$

مثــــال: (١) :

انطلقت سيارة من مدني إلى كسلا بسرعة ١١٥ كلم/ ساعة وفي نفس اللحظة انطلقت سيارة أخرى من كسلا إلى مدني بسرعة ١١٠ كلم/ ساعة فإذا كانت المسافة بين مدني وكسلا ٤٥٠ كلم تقريباً . جد الآتي :

أ) سرعة الاقتراب . ب) متى تلتقيان ؟ جـ) كم بعديهما عن مدني وعن كسلا حينئذٍ ؟

الحــــل:

أ) السيارتان تسيران نحو بعضيهما

∴ السرعة التي تقتربان بها هي سرعة الاقتراب

سرعة الاقتراب = مجموع السرعتين = ١١٥ + ١١٠ = ٢٢٥ كلم/ ساعة

ب) زمن الاقتراب (زمن الالتقاء) = $\frac{\text{المسافة بينهما}}{\text{مجموع السرعتين}}$ = $\frac{٤٥٠}{٢٢٥}$ = ٢ ساعة

يلتقيان بعد ساعتين من تحرّكهما

جـ) بعديهما عن مدني = ٢ × ١١٥ = ٢٣٠ كلم

بعديهما عن كسلا = ٢ × ١١٠ = ٢٢٠ كلم

مثـــال: (١) :

البعد بين ربك وكوستي ١٧ كلم تقريباً ، تحرّك خالد من ربك بسرعة ٣ كم/ ساعة قاصداً كوستي ، وتحرك نجيب من كوستي قاصداً ربك بسرعة ٢ كلم/ ساعة فإذا بدءا السير معاً الساعة ١٥ : ٦ صباحاً فمتى يتقابلان ؟

الحـــل:

زمن الاقتراب (زمن التقابل) = $\frac{\text{المسافة بينهما}}{\text{مجموع السرعتين}}$

مجموع السرعتين = ٣ + ٢ = ٥ كلم/ ساعة

زمن الاقتراب (زمن التقابل) = $\frac{١٧}{٥}$ = ٣,٤ ساعة

= ٣ ساعات و٢٤ دقيقة

		دقيقة		ساعة
وقت القيام	=	١٥	:	٦
الزمن الذي يستغرقانه	=	٢٤	:	٣
الوقت الذي يتقابلان فيه	=	٣٩	:	٩

يتقابلان الساعة التاسعة و٣٩ دقيقة صباحاً .

تمرين (٣)

١) تحرّك باص سياحي من الخرطوم إلى الفاشر بسرعة ١٠٥ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت تحرّك باص سياحي آخر من الفاشر إلى الخرطوم بسرعة ٨٥ كلم/ ساعة فإذا كانت المسافة بين الفاشر والخرطوم ١١٤٠ كلم تقريباً بعد كم من الزمن يتقابلان وعلى بعد كم كيلومتر من الفاشر ؟

٢) البعد بين قريتين (أ) ، (ب) ٢٥ كلم ، قام رجل من القرية (أ) بسرعة ٤ كلم/ ساعة قاصداً القرية (ب) وبعد ساعة من قيامه تحرّك رجل آخر من القرية (ب) قاصداً القرية (أ) بسرعة ٣ كلم/ ساعة . بعد كم من الزمن من قيام الأول يلتقيان ، وعلى أي بعد من القرية (ب) ؟

٣) قام راكب دراجة كهربائية من بورتسودان الساعة ٤٥ : ٧ صباحاً قاصداً سواكن التي تبعد ٧٠ كلم تقريباً من بورتسودان وبعد مضي ساعة ونصف من قيامه قامت سيارة من سواكن قاصدة بورتسودان فإذا كانت سرعة الدراجة ١٠ كلم/ ساعة وسرعة السيارة ٤٥ كلم/ ساعة . متى يقابل راكب الدراجة الكهربائية السيارة وعلى أي بعد من بورتسودان؟

٤) تحرّك لوري مُحمّل بالبلح من دنقلا إلى كريمة بسرعة ٤٥ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت تحرّك لوري آخر مُحمّل بالبضائع من كريمة إلى دنقلا والتقيا بعد ساعتين من تحرّكهما ، فإذا كانت المسافة بين دنقلا وكريمة ١٧٢ كلم تقريباً جد سرعة اللوري الآخر .

(٤–٤) سرعة اللحاق

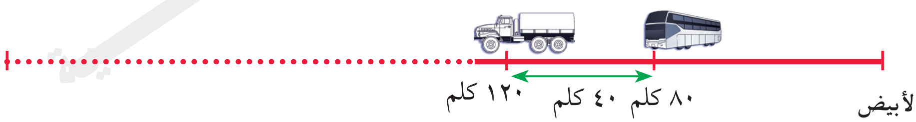
تحرّكت شاحنة من الأبيّض قاصدة مدينة أمدرمان الساعة الخامسة صباحاً بسرعة ٦٠ كلم/ ساعة وبعد ساعة من قيـــــامها تحرّك باص من نفس المكان بســــرعة ٨٠ كلم/ ساعة قاصداً أمدرمان وسلك نفس طريق الشاحنة . فمتى يلحق الباص بالشاحنة ؟ وكم يكون بعدهما من الأبيّض حينئذ ؟

الحـــــل:

عندما تحرّك الباص الساعة السادسة صباحاً كانت الشاحنة على بعد ٦٠ كلم من الأبيّض . اي أن المسافة بين الشاحنة والباص كانت ٦٠ كلم .

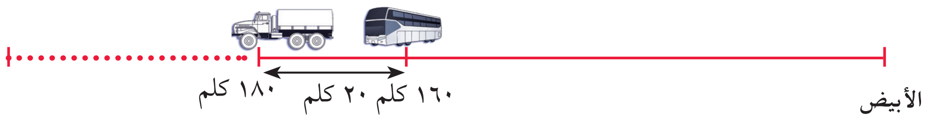
الشكل (١)

وعند الساعة السابعة تكون الشاحنة قد سارت مدة ساعتين وتكون على بعد ١٢٠ كلم من الأبيّض ويكون الباص قد سار ساعة واحدة ويكون على بعد ٨٠ كلم من الأبيّض وتكون المسافة بينهما ٤٠ كلم (١٢٠ – ٨٠) كلم اي أن المسافة بينهما قد نقصت ٢٠ كلم في الساعة الأولى كما في الشكل (٢)



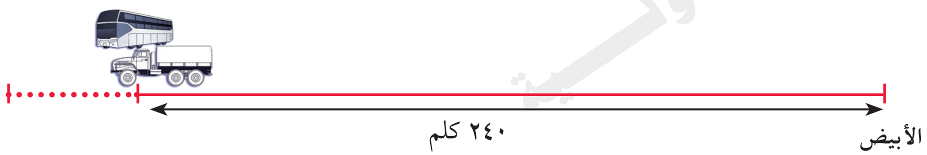
الشكل (٢)

وعند الساعة الثامنة تكون الشاحنة على بعد ١٨٠ كلم (٣ × ٦٠) كلم من الأبيّض ويكون الباص على بعد ١٦٠ كلم (٢ × ٨٠) كلم من الأبيّض وتكون المسافة بينهما ٢٠ كلم (١٨٠ – ١٦٠) كلم أي أن المسافة بينهما تكون قد نقصت ٢٠ كلم أخرى بعد الساعة الثانية من قيام الباص كما في الشكل (٣)



الشكل (٣)

وعند الساعة التاسعة تكون الشاحنة على بعد ٢٤٠ كلم (٤ × ٦٠) كلم من الأبيّض ويكون الباص على بعد ٢٤٠ كلم (٣ × ٨٠) كلم من الأبيّض أي يكون الباص قد لحق بالشاحنة كما في الشكل (٤)



الشكل (٤)

لاحظ أنّ : المسافة بين الباص والشاحنة كانت تتناقص بمعدّل ٢٠ كلم في الساعة وهي عبارة عن الفرق بين سرعتي الباص والشاحنة وهذا المعدّل يسمى **سرعة اللحاق** .

إذا سار جسمان في اتجاه واحد فإنّ سرعة اللحاق بينهما تساوي الفرق بين سرعتيهما

سرعة اللحاق = الفرق بين السرعتين

■ كم الزمن الذي استغرقه الباص ليلحق بالشاحنة ؟

نلاحظ أنّ :

$$\text{الزمن الذي استغرقه الباص ليلحق بالشاحنة} = \frac{\text{٦٠ كلم}}{(\text{٨٠} - \text{٦٠})\ \text{كلم/ ساعة}}$$

$$= \frac{\text{٦٠ كلم}}{\text{٢٠ كلم/ ساعة}} = \text{٣ ساعات}$$

أي أنّ :

$$\text{زمن اللحاق} = \frac{\text{المسافة بينهما}}{\text{الفرق بين السرعتين}}$$

ونلاحظ أيضاً أنّ : المسافة بينهما عند بداية تحرك الباص هي عبارة عن سرعة الشاحنة مضروبة في الزمن بينهما عند بداية تحرّك الباص .

وعليه :

إذا تحرّك جسمان في اتجاه واحد فإنّ :

$$\text{زمن اللحاق} = \frac{\text{سرعة الجسم الأول} \times \text{الزمن بينهما}}{\text{الفرق بين السرعتين}}$$

مثـــال: (١) :

تحرّك الباقر الساعة الثامنة صباحاً من قريته إلى الدامر بسرعة ٤ كلم/ ساعة وبعد ثلاث ساعات تحرّك البراء راكباً دراجة كهربائية من نفس القرية إلى الدامر بسرعة ١٢ كلم/ ساعة وسلك نفس الطريق . فمتى يلحق البراء بالباقر ؟ وكم يكون بعدهما من القرية آنذاك ؟

الحـــل:

بُعد الباقر من القرية بعد ٣ ساعات = ٤ × ٣ = ١٢ كلم

عندما قام البراء من القرية كانت المسافة بينهما = ١٢ كلم

$$\text{زمن اللحاق} = \frac{\text{المسافة بينهما}}{\text{الفرق بين السرعتين}} = \frac{١٢}{١٢ - ٤} = \frac{١٢}{٨} = ١\frac{١}{٢} \text{ ساعة}$$

∴ الزمن الذي يلحق فيه البراء الباقر = $١\frac{١}{٢}$ ساعة

		الدقيقة	الساعة
وقت القيام	=	٠٠ :	٨
الزمن الذي يستغرقه البراء ليلحق الباقر	=	٣٠ :	١
الوقت الذي يلحق فيه البراء الباقر	=	٣٠ :	٩

يلحق البراء الباقر الساعة التاسعة والنصف صباحاً .

بعدهما عن القرية = $١\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ١٨ كلم

أو = $٤\frac{١}{٢}$ × ٤ = ١٨ كلم

مثـــال: (٢) :

انطلقت سيارة من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) بسرعة ٤٠ كلم/ ساعة ، وانطلقت سيارة أخرى من نفس المكان بسرعة ١٢٠ كلم/ ساعة فإذا لحقت السيارة الثانية الأولى بعد ساعة جد :

١) المسافة بينهما .

٢) الزمن الكُلّي للسيارة الأولى من تحرّكها حتى لحقت بها السيارة الثانية .

الحـــــل:

سرعة السيارة الأولى = ٤٠ كلم/ ساعة

سرعة السيارة الثانية = ١٢٠ كلم/ ساعة

زمن اللحاق = ١ ساعة

١) زمن اللحاق = $\frac{\text{المسافة بينهما}}{\text{فرق السرعتين}}$

١ = $\frac{\text{المسافة بينهما}}{١٢٠ - ٤٠}$

∴ المسافة بينهما = ٨٠ كلم

٢) المسافة بينهما عند بداية تحرك السيارة الثانية = سرعة السيارة الأولى × الزمن بينهما

٨٠ = ٤٠ × الزمن بينهما ، ∴ الزمن بينهما = $\frac{٨٠}{٤٠}$ = ٢ ساعة

الزمن الكُلّي للسيارة الأولى = الزمن بينهما + زمن اللحاق

= ٢ + ١ = ٣ ساعات

∴ الزمن الكُلّي الذي استغرقته السيارة الأولى من تحرّكها حتى لحقت بها السيارة الثانية = ٣ ساعات

تمرين (٤)

١) أ ، ب ، جـ ثلاث قرى على طريق رئيسي واحد . البعد بين أ ، ب ١٨ كلم . تحرّك راكب دراجة من القرية (أ) بسرعة ١٠ كلم/ ساعة قاصداً القرية (جـ) وفي نفس الوقت تحرّك رجل من (ب) ماشياً بسرعة ٤ كلم/ ساعة قاصداً القرية (جـ) أيضاً . بعد كم من الزمن يلحق راكب الدراجة الرجل ؟ وإذا وصلا معاً عند دخولهما القرية (جـ) فما بُعد القرية (جـ) من القرية (ب) ؟

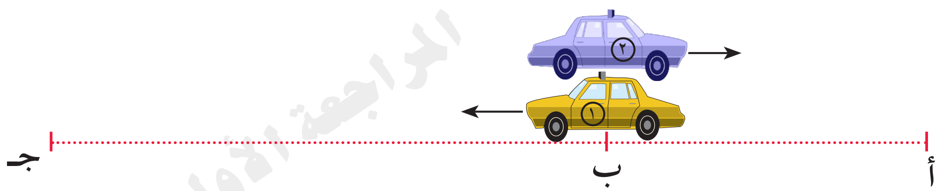
٢) انطلقت سيارة من سنار إلى الخرطوم بسرعة ٥٠ كلم/ ساعة وانطلقت سيارة أخرى بعد ساعتين من نفس المكان ، فإذا لحقت السيارة الثانية الأولى بعد ساعتين جد سرعة السيارة الثانية .

٣) قام رجل الساعة ٣٠ : ٧ صباحاً من الدويم قاصداً شبشة ومشى بسرعة ٥ كلم/ ساعة وفي الساعة ٩ صباحاً قام راكب دراجة من الدويم قاصداً شبشة أيضاً وسار بسرعة ١١ كلم/ ساعة . متى يلحق الثاني الأول ؟ وكم يكون بُعدهما من الدويم عندئذ؟

(٤-٥) سرعة الابتعاد

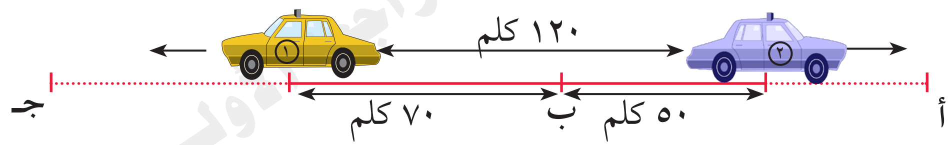
(أ) إذا سار الجسمان في اتجاهين مختلفين :

أ ، ب ، جـ ثلاث مدن ، المدينة (ب) تقع بين المدينتين أ ، جـ قامت سيارة من المدينة (ب) قاصدة المدينة (جـ) بسرعة ٧٠ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت قامت سيارة أخرى من المدينة (ب) بسرعة ٥٠ كلم/ ساعة قاصدة المدينة (أ) . كم المسافة بينهما بعد ساعة وكم المسافة بينهما بعد ساعتين ؟



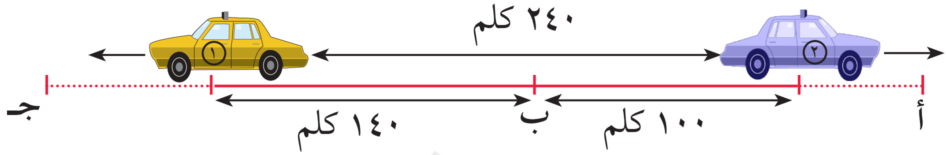
الشكل (١)

الشكل (١) يوضّح السيارة الأولى والثانية عند نقطة البداية وبعد أن تسير كل منهما ساعة واحدة تكون السيارة الأولى قد قطعت ٧٠ كلم ، والسيارة الثانية قد قطعت ٥٠ كلم أي انهما قطعا معاً مسافة ١٢٠ كلم وصارت المسافة بينهما ١٢٠ كلم (٧٠ + ٥٠) كلم كما في الشكل (٢)



الشكل (٢)

بعد ساعة أخرى أي بعد ساعتين من قيامهما تكون السيارة الأولى قد قطعت مسافة ٧٠ كلم أخرى وقطعت السيارة الثانية مسافة ٥٠ كلم أخرى وقطعتا معاً خلال الساعة الثانية مسافة ١٢٠ كلم ، وبذلك تكونان قد قطعتا معاً مسافة ٢٤٠ كلم (٢ × ١٢٠) كلم في الساعتين وابتعدتا عن بعضيهما مسافة ٢٤٠ كلم كما في الشكل (٣)



الشكل (٣)

نلاحظ أنّ :

السيارتان تقطعا معاً مسافة ١٢٠ كلم في الساعة الواحدة لتبتعدان عن بعضيهما والتي ستقطعانها معاً لتبعدا وهذه المسافة التي تبتعدان بها في كل ساعة هي عبارة عن مجموع سرعتيهما وبذلك يمكن القول أن السرعة التي تبتعدان بها عن بعضيهما هي مجموع سرعتيهما وهذه السرعة تُسمى **سرعة الابتعاد** .

إذا سار جسمان بعيداً عن بعضهما فإن سرعة ابتعادهما تساوي مجموع سرعتيهما

سرعة الابتعاد = مجموع السرعتين

مثـــال: (١) :

تحرّكت سيارة من شندي متجهة جنوباً نحو الخرطـوم الساعة ٣٠ : ٨ صباحاً بسرعة ١١٠ كلم/ ساعة ، وتحرّكت حافلة من نفس المكان متجهة شمالاً نحو عطبرة الساعة ٣٠ : ٨ صبـاحاً بسرعة ٩٠ كلم/ ساعة . كم يكـون البعد بينهما عند السـاعة ٣٠ : ١١ صباحاً ؟

الحـــــل:

بما أنهما يسيران في اتجاهين مختلفين

∴ سرعة الابتعاد = مجموع السرعتين

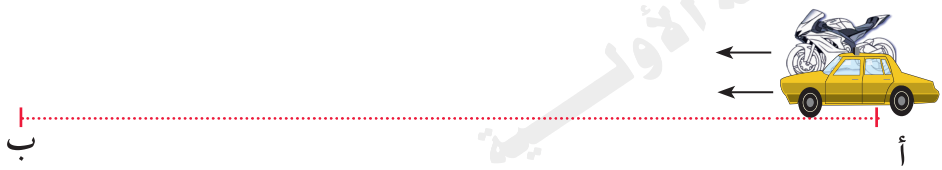
= ١١٠ + ٩٠ = ٢٠٠ كلم/ ساعة

الزمن الذي استغرقتاه =(٣٠ : ١١) – (٣٠ : ٨) = ٣ ساعات

∴ البعد بينهما = ٢٠٠ × ٣ = ٦٠٠ كلم

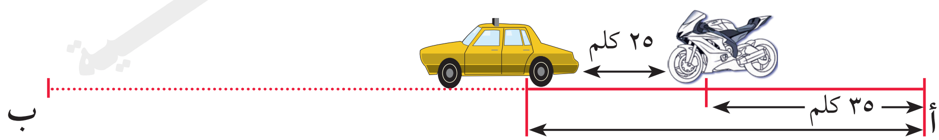
(ب) إذا سار الجسمان في اتجاه واحد :

تحرّكت سيارة من المدينة (أ) قاصدة المدينة (ب) بسرعة ٦٠ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت قام راكب دراجة نارية من المدينة (أ) قاصداً المدينة (ب) بسرعة ٣٥ كلم/ ساعة . كم المسافة بينهما بعد ساعة ؟ كم المسافة بينهما بعد ساعتين ؟



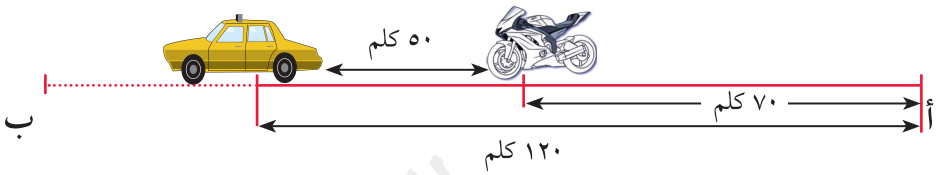
الشكل (١)

الشكل (١) يوضّح السيارة والدراجة النارية عند نقطة البداية وبعد أن تسير كل من السيارة والدراجة ساعة واحدة تكون السيارة قد قطعت ٦٠ كلم والدراجة قد قطعت ٣٥ كلم ويكون البعد بينهما ٢٥ كلم (٦٠ – ٣٥) كلم كما في الشكل (٢)



الشكل (٢)

وبعد ساعة أخرى أي بعد ساعتين من قيامهما تكون السيارة قد قطعت مسافة ٦٠ كلم أخرى والدراجة قد قطعت مسافة ٣٥ كلم أخرى وابتعدتا عن بعضيهما مسافة ٢٥ كلم أخرى وبذلك تكونان قد ابتعدتا عن بعضيهما مسافة ٥٠ كلم (٢ × ٢٥) كلم في الساعتين كما في الشكل (٣)



الشكل (٣)

نلاحظ أنّ :

السيارة والدراجة تبتعدان عن بعضيهما مسافة ٢٥ كلم في الساعة الواحدة وهذه المسافة التي تبتعدان بها في كل ساعة عبارة عن الفرق بين سرعتيهما وبذلك يمكن أن نقول أنّ السرعة التي تبتعدان بها عن بعضهما هي الفرق بين سرعتيهما وهذه السرعة تُسمّى **سرعة الابتعاد** .

إذا سار جسمان في اتجاه واحد فإنّ سرعة ابتعادهما عن بعضهما تساوي الفرق بين سرعتيهما .

سرعة الابتعاد = الفرق بين السرعتين

مثـــال: (٢) :

تحرّكت سيارة من المدينة (أ) قاصدة المدينة (ب) بسرعة ٩٥ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت قامت حافلة من المدينة (ب) قاصدة المدينة (أ) بسرعة ٧٥ كلم/ ساعة . ما البعد بينهما بعد ٤ ساعات ؟

الحـــل:

بما أنهما يسيران في اتجاه واحد

∴ سرعة الابتعاد = الفرق بين السرعتين

= ٩٥ — ٧٥ = ٢٠ كلم/ ساعة

البُعد بينها بعد ٤ ساعات = ٤ × ٢٠ = ٨٠ كلم

تمرين (٥)

١) تحرّك قطار ركّاب من محطة سكة حديد متجهاً نحو الشرق بسرعة ٨٢ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت تحرّك قـــطار بضائع من نفس المحطّة متجهاً نحو الغـــرب بسرعة ٥٥ كلم/ ساعة . ما سرعة ابتعادهما ؟ ما البُعد بينهما بعد مضي ٥ ساعات ؟

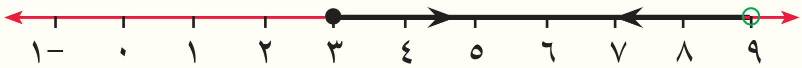
٢) تحرّكت شاحنة من عبري قاصدة حلفا بسرعة ٥٠ كلم/ ساعة وفي نفس الوقت تحرّكت سيارة من عبري قاصدة حلفا بسرعة ٦٥ كلم/ ساعة . ما البُعد بينهما بعد ساعتين ؟

٣) تحرّكت طائرة من الدولة (أ) نحو الدولة (ب) الســـاعة الخامسة صباحاً بسرعة ٧٠٠ كلم/ ساعة وبعد مضي ساعتان تحرّكت طائرة أخـــرى من الدولة (أ) إلى الدولة (ب) بسرعة ٩٠٠ كلم/ ساعة متى تلحق الطائرة الثانية الأولى ؟ وكم تكون المسافة بينهما بعد مضي ساعتان ونصف من لحاق الطائرة الثانية بالأولى ؟

الوحدة الخامسة

٥

المتباينات



(٥–١) المتباينة

تعرّفنا سابقاً أنّ الأعداد تتميز بخاصية الترتيب وتعرّفنا أيضاً المقارنة بين الأعداد باستخدام العلاقات = ، > ، < حيث ٧ > ٥ ، ٢ < ٦ ، −١ > −٤ .

فالجملة ٧ > ٥ تعني أنّ ٧ ≠ ٥ وأنّ العدد ٧ أكبر من العدد ٥ ، ونقول عند ذلك انّ العددين ٧ ، ٥ عددان متباينان أي مختلفان .

وهنالك خاصية هامة من خواص الأعداد وهي : لأي عددين أ ، ب إمّا :

أ < ب أو أ = ب أو أ > ب حيث :

< ، > ، ≤ ، ≥ تسمى برموز التباين .

تعرّفنا سابقاً الجمل الرياضية وعليه فإن الجملة الرياضية التي تحتوي على أحد رموز التباين تسمى **متباينة** .

مثلاً :

س > ٤ ، س + ١ < ٣ ، ٣ ص ≥ ٢ ، ٦ < س < ١٠

وهي متباينات من الدرجة الأولى ذات متغير واحد .

وللمتباينة طرفان : طرف أيمن وطرف أيسر حيث يمكن قراءة المتباينة إبتداءً من طرفها الأيمن أو طرفها الأيسر فالمتباينة س > ٤ تقرأ :

س أكبر من العدد ٤ أو العدد ٤ أصغر من س

المتباينة س + ١ < ٣ تقرأ :

س مضاف إليها ١ أصغر من العدد ٣

المتباينة ٣ ص ≤ ٢ تقرأ : ثلاثة أمثال ص أصغر من أو يساوي العدد ٢

وتعني ٣ ص = ٢ أو ٣ ص < ٢

المتباينة ٦ < س < ١٠ تقرأ :

س أكبر من ٦ وأصغر من ١٠ أو س تقع بين العددين ٦ ، ١٠

مثـــال (١) :

عبّر رمزياً عن المتباينات الآتية :

١) ضعف س أصغر من ٩

٢) إذا طرح العدد ٣ من العدد ص كان الناتج أكبر من أو يساوي ٨

الحـــل:

١) ٢ س < ٩

٢) ص − ٣ ≥ ٨

مثـــال (٢) :

قارن بين المقدارين : ٢ص + ١ ، ص − ٢ إذا كان : ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

الحـــــل:

عند ص = ١ المقدار الأول = ٢ × ١ + ١ = ٣

المقدار الثاني = ١ − ٢ = −١

عند ص = ٢ المقدار الأول = ٢ × ٢ + ١ = ٥

المقدار الثاني = ٢ − ٢ = ٠

عند ص = ٣ المقدار الأول = ٢ × ٣ + ١ = ٧

المقدار الثاني = ٣ − ٢ = ١

نجد في كل الحالات أنّ المقدار الثاني أصغر من المقدار الأول

∴ ص − ٢ < ٢ص + ١ ∀ ص ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ } حيث الرمز ∀ يقرأ (الكل)

تمرين (١)

(أ) عبّر رمزياً عن المتباينات الآتية :

١) س أصغر من ١٢

٢) س مطروح منها العدد ٢ أكبر من أو يساوي ١

٣) العدد ص أصغر من ضعفه

٤) إذا أضيف نصف العدد ب إلى العدد ٨ كان الناتج أكبر من ٧

٥) العدد جـ محصوراً بين −١ ، ٥

٦) العدد س أكبر من نظيره الضربي .

٧) ساعتان على الأقل لحل امتحان ، (ن تمّثل الزمن)

(ب) ضع إحدى رموز التباين في ☐

١) ٢س ☐ ٢ ، (س ∈ ط)

٢) أ ☐ أ + ٥ ، (أ ∈ ط)

٣) ٥س ☐ ١٠ ، س ∈ { ٢ ، ٣ ، ٤ }

(جـ) إذا كان أ < ب ، ب < جـ ، ما العلاقة الصحيحة بين أ ، جـ وضّح ذلك بإعطاء أمثلة .

(٥–٢) حل المتباينة

تعرّفنا سابقاً أن الجملة الرياضية التي تشتمل على الرمز = تسمى **معادلة** ، أما التي تتضمن الرموز > ، < ، ≥ ، ≤ تسمى **متباينة** ، ومجموعة الحل للمتباينة تتكون من الأعداد التي يتم تعويضها بدلاً عن المتغير في المتباينة لتصبح صحيحة .

مثـــال (١) :

جد مجموعة حل المتباينة س + ١ < ٤ حيث س ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

الحـــل:

عندما س = ١ فإنّ ١ + ١ = ٢ < ٤ جملة صحيحة

عندما س = ٢ فإنّ ٢ + ١ = ٣ < ٤ جملة صحيحة

عندما س = ٣ فإنّ ٣ + ١ = ٤ < ٤ جملة غير صحيحة

عندما س = ٤ فإنّ ٤ + ١ = ٥ < ٤ جملة غير صحيحة

من التعويض السابق فإنّ المجموعة التي تجعل المتباينة س + ١ < ٤ صحيحة هي

سَ = { ١ ، ٢ }

مثـــال (٢) :

جد مجموعة حل المتباينة ٣ص ≥ ٦ ، ص ∈ ط

الحـــــل:

المجموعة طُ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . }

عند ص = ١ فإنّ ٣ × ١ = ٣ ≥ ٦ جملة غير صحيحة

عند ص = ٢ فإنّ ٣ × ٢ = ٦ ≥ ٦ جملة صحيحة

عند ص = ٣ فإن ٣ × ٣ = ٩ ≥ ٦ جملة صحيحة

عند ص = ٤ فإن ٣ × ٤ = ١٢ ≥ ٦ جملة صحيحة وهكذا . . .

عليه فإنّ مجموعة الحل للمتباينة ٣ص ≥ ٦ هي { ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . }

مما سبق وبشكل عام تسمى المجموعة التي تجعل المتباينة صحيحة دائماً مجموعة الحل وهي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

وبما أنّ طريقة التعويض طويلة وخصوصاً عندما يكون عدد عناصر مجموعة التعويض كبير نسبياً أو لا نهائياً كما في المثال (٢) فيلزم في هذه الحالة استخدام خواص التباين .

تمرين (٢)

جد مجموعة حل المتباينات التالية :

١) ٢س > ٥ ، س ∈ {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦}

٢) س + ٢ ≤ ٣ ، س ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

٣) س − ١ > ٤ ، س ∈ {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

٤) ٥س ≥ ٢٠ ، س ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

(٥–٣) خواص التباين

(١) أ) إذا كان ٦ > ٢

أضف ٣ للطرفين ماذا تلاحظ ؟

٦ + ٣ > ٢ + ٣ ، ٩ > ٥

ب) إذا كان ٣ < ٧

أضف ٤ للطرفين ماذا تلاحظ ؟

٣ + ٤ < ٧ + ٤ ، ٧ < ١١

مما سبق نلاحظ أنّ :

إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميتين متباينتين فإن الناتج كميتان متباينتان بعلامة التباين نفسها أي تظل علامة التباين دون تغيير .

وبصورة عامة :

إذا كان أ ، ب ، جـ ∈ ن

(أ) وكان أ > ب فإنّ أ + جـ > ب + جـ

(ب) إذا كان أ < ب فإنّ أ + جـ < ب + جـ

(٢) أ) إذا كان ٩ > ٨

اطرح ٣ من الطرفين ماذا تلاحظ ؟

٩ – ٣ > ٨ – ٣

٦ > ٥

ب) إذا كان ٥ < ٧

اطرح ٢ من الطرفين ماذا تلاحظ ؟

٥ − ٢ < ٧ − ٢ ، ٣ < ٥

مما سبق نلاحظ أنّ :

إذا طرحت كميات متساوية من كميتين متباينتين فإنّ الناتج كميتان متباينتان بعلامة التباين نفسها أي تظل علامة التباين دون تغيير .

وبصورة عامة :

إذا كان أ ، ب ، جـ ∈ ن

(أ) وكان أ > ب فإنّ أ − جـ > ب − جـ

(ب) إذا كان أ < ب فإنّ أ − جـ < ب − جـ

(٣) أ) إذا كان ٤ > ٢

أضرب الطرفين في ٥ ماذا تلاحظ ؟

٤ × ٥ > ٢ × ٥

٢٠ > ١٠

ب) إذا كان ٣ < ١٠

أضرب الطرفين في ٤ ماذا تلاحظ ؟

٣ × ٤ < ١٠ × ٤

١٢ < ٤٠

مما سبق نلاحظ أنّ :

إذا ضربت كمية موجبة في كميتين متباينتين فإنّ الناتج كميتان متباينتان بعلامة التباين نفسها .

وبصورة عامة :

(أ) إذا كان أ > ب ، جـ > ٠ فإنّ أ جـ > ب جـ

(ب) إذا كان أ < ب ، جـ > ٠ فإنّ أ جـ < ب جـ

(٤) أ) إذا كان ٦ > ٥

أضرب الطرفين في -٢ ماذا تلاحظ ؟

٦ × -٢ < ٥ × -٢

-١٢ < -١٠

ب) إذا كان ٤ < ١١

أضرب الطرفين في -٣ ماذا تلاحظ ؟

٤ × -٣ > ١١ × -٣

-١٢ > -٣٣

مما سبق نلاحظ أنّ :

إذا ضربت كمية سالبة في كميتين متباينتين فإن الناتج كميتان متباينتان بعكس علامة التباين ، أي تتغير علامة التباين من (أكبر من) إلى (أصغر من) أو العكس .

وبصورة عامة :

(أ) إذا كان أ > ب ، جـ < ٠ (جـ عدد سالب) فإنّ أ جـ < ب جـ

(ب) إذا كان أ < ب ، جـ < ٠ (جـ عدد سالب) فإنّ أ جـ > ب جـ

(٥) إذا كان أ ، ب ، جـ ∈ ح

(أ) وكان أ > ب ، جـ > ٠ فإنّ $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$

(ب) إذا كان أ < ب ، جـ > ٠ فإنّ $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$

(حـ) إذا كان أ > ب ، جـ < ٠ فإنّ $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$

(د) إذا كان أ < ب ، جـ < ٠ فإنّ $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$

ضع أمثلة عددية من عندك وتحقق من الخواص (أ) ، (ب) ، (جـ) ، (د)

(٤−٥) حل المتباينة باستخدام خواص التباين

مثـــال (١) :

جد مجموعة حل المتباينة س + ٢ < ٧ ، حيث س ∈ ص ثم مثّلها على خط الأعداد .

الحـــــل:

المتباينة هي : س + ٢ < ٧

بطرح ٢ من طرفي المتباينة

س + ٢ − ٢ < ٧ − ٢

س < ٥

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ... }

وهي مجموعة جزئية من ص عناصرها أصغر من ٥

لاحظ أنّ العدد ٥ عليه دائرة غير مظللة لأنّ ٥ ∉ إلى مجموعة الحل

مثـــال (٢) :

جد مجموعة حل المتباينة ٣س − ٣ ≥ ٦ ، س ∈ ط ثم مثّلها على خط الأعداد .

الحـــــــل:

٣س − ٣ ≥ ٦

بإضافة ٣ إلى طرفي المتباينة

٣س − ٣ + ٣ ≥ ٦ + ٣ ،   ٣س ≥ ٩

بقسمة طرفي المعادلة على ٣

$\frac{\text{٣ س}}{\text{٣}} \geq \frac{\text{٩}}{\text{٣}}$ ∴ س ≥ ٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤ ، ٥ ، . . .}

لاحظ أنّ : ٣ عليها دائرة مظللة لأنّ ٣ ∈ إلى مجموعة الحل .

مثـــــال (٣) :

جد مجموعة حل المتباينة ١ − ٥س ≤ ١١ ، س ∈ { −٤ ، −٢ ، ٠ ، ٢ }

الحـــــــل:

١ − ٥س ≤ ١١   بطرح ١ من طرفي المتباينة

١ − ٥س − ١ ≤ ١١ − ١ ،   −٥س ≤ ١٠

بالقسمة على −٥

$\frac{\text{−٥ س}}{\text{−٥}} \geq \frac{\text{١٠}}{\text{−٥}}$ (لاحظ أنّ علامة التباين تغيّرت لماذا؟)

س ≥ − ٢

ولكن س ∈ { −٤ ، −٢ ، ٠ ، ٢ }   ،   ∴ مجموعة الحل = { −٢ ، ٠ ، ٢ }

مثـــال (٤):

جد مجموعة حل المتابينة ٤س + ٣ > س + ٩ ، س ∈ ك

الحــــل:

٤س + ٣ > س + ٩

٤س + ٣ − ٣ > س + ٩ − ٣

٤س > س + ٦

٤س − س > س + ٦ − س

٣س > ٦

$\frac{\text{٣ س}}{\text{٣}} > \frac{\text{٦}}{\text{٣}}$ ∴ س > ٢

بما أنّ س ∈ ك ∴ س ∈ { ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . }

∴ مجموعة الحل = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، . . . }

مثـــال (٥):

جد مجموعة حل المتباينة ٢ ≤ ٢س − ٤ < ١٤ ، س ∈ صحثم مثّلها على خط الأعداد .

الحـــــل:

تُسمى مثل هذه المتباينة بالمتباينة المركّبة .

بإضافة ٤ لأطراف المتباينة

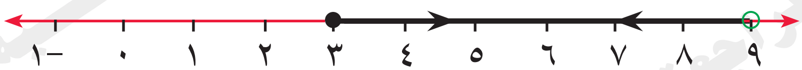
٢ + ٤ ≤ ٢س − ٤ + ٤ < ١٤ + ٤

٦ ≤ ٢س < ١٨

بقسمة المتباينة على ٢

٣ ≤ س < ٩

بما أنّ س ∈ ص ∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}



بعض المتباينات يصعب علينا وضع المتغير س في طرف واحد من أطراف المتباينة المركبة ، لذلك نعمل على فصل المتباينة إلى متباينتين ، ويوضح ذلك المثال التالي :

مثـــال (٦) :

جد مجموعة حل المتباينة س + ٤ < ٣س − ٢ ≤ ٢س + ١٠ ، س ∈ طُ ثم مثّلها على خط الأعداد

الحـــل:

بفصل المتباينة س + ٤ < ٣س − ٢ ≤ ٢س + ١٠ إلى متباينتين

١) س + ٤ < ٣س − ٢ ٢) ٣س − ٢ ≤ ٢س + ١٠

بحل المتباينة (١)

س + ٤ < ٣س − ٢

س + ٤ + ٢ < ٣س − ٢ + ٢ ، س + ٦ < ٣س

س + ٦ − س < ٣س − س ، ٦ < ٢س

٦/٢ < ٢س/٢ ، ٣ < س

بحل المتباينة (٢)

٣س − ٢ ≤ ٢س + ١٠

٣س − ٢ + ٢ ≤ ٢س + ١٠ + ٢

٣س ≤ ٢س + ١٢ ، ٣س − ٢س ≤ ٢س + ١٢ − ٢س ، س ≤ ١٢

بدمج حل المتباينتين معاً

٣ < س ≤ ١٢

بما أنّ س ∈ ط ∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

تمرين (٣)

(أ) جد مجموعة حل المتباينات الآتية ثم مثّلها على خط الأعداد :

١) ٤س ≥ ٨ ، س ∈ ط
٢) س + ٥ > ٩ ، س ∈ ص

٣) ٢س + ٣ < ١٥ ، س ∈ ن
٤) ١ − ٣س ≤ ٢٢ ، س ∈ ص

٥) ١ < س + ٣ < ٩ ، س ∈ ص

٦) ٨ < ٤ (٣س − ١) ≤ ٤٤ ، س ∈ ط

٧) ٧س + ١٢ < ٦س + ٨ ، س ∈ ص

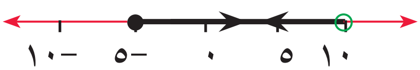
٨) ٣س + ١٠ ≤ ٦س + ٤ < ٢س + ٢٨ ، س ∈ ط

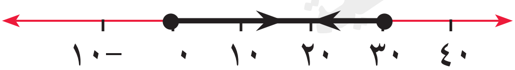
(ب) اكتب المتباينات الممثّلة على الخط العددي التالي :

١)


٢)


٣)


٤)


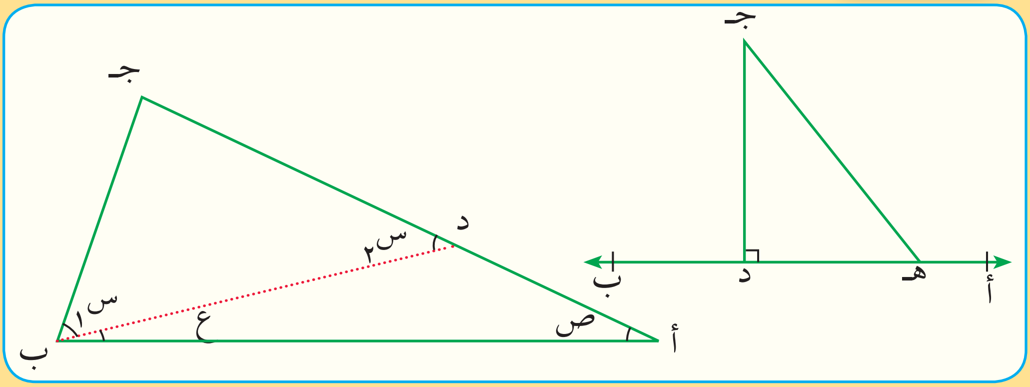
٥)


(جـ) مستطيل مساحته أكبر من ٢٤ سم^{٢} ، إذا كان عرضه ٣ سم جد أقل قيمة يمكن أن يأخذها طول المستطيل . (طول المستطيل ∈ ط)

(د) عُمر أحمد يزيد عن عُمر علي بست سنوات فإذا كان مجموع عمريهما أقل من ٢٤ سنة جد أكبر قيمة يمكن أن يأخذها عُمر علي . (العُمر ∈ ط)

الوحدة السادسة

٦ نظريات التباين



(٦–١) التباين

تمهيد :

- هل تلاميذ فصلك لهم نفس الطول؟
- هل الحيوانات لها نفس الحجم؟
- هل الدول في خريطة العالم لها نفس المساحة؟
- هل الزوايا الحادة والقائمة والمنفرجة لها نفس القياس؟

ماذا يعني هذا الاختلاف؟

مما سبق يمكن التوصل إلى تعريف التباين :

تعريف:

التباين يعني وجود اختلاف في الأطوال أو المساحات أو قياسات الزوايا أو الكميات أو غيرها .

حيث يرمز للتباين بالعلامات الآتية :

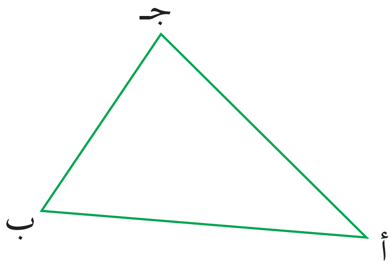
أكبر من > ، أصغر من <

أكبر من أو يساوي ≥ ، أصغر من أو يساوي ≤

وفي هذه الوحدة سوف نحصر دراستنا على التباين في أضلاع المثلث وزواياه من خلال بعض النظريات .

نظرية (١):

نشاط (١) :



١) ارسم Δ أ ب جـ بحيث $\overline{\text{أ جـ}}$ > $\overline{\text{ب جـ}}$

٢) قس الزاوية التي تقابل الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$

٣) قس الزاوية التي تقابل الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$

٤) قارن بين الزاوية التي تقابل الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$ والزاوية التي تقابل الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$. أيهما أكبر؟

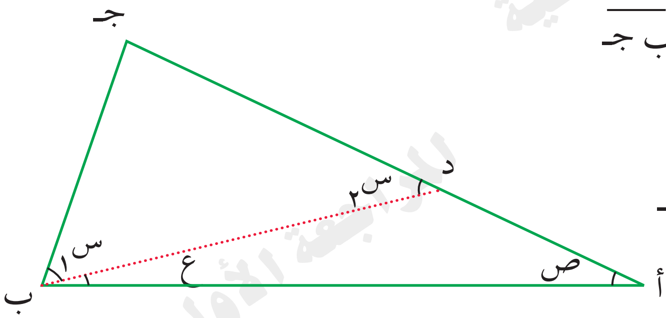
من النشاط السابق يمكن التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (١) :

إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فإن الضلع الأكبر تقابله الزاوية الكبرى

البرهان النظري :

المعطيات :



في Δ أ ب جـ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ > $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب إثباته :

∡ أ ب جـ > ∡ ب أ جـ

العمل :

عيّن النقطة د على $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث $\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{جـ ب}}$

البرهان :

في Δ د جـ ب ، $\overline{\text{جـ د}} = \overline{\text{جـ ب}}$ (بالعمل)

س$_1$ = س$_2$ (زاويتا قاعدة في مثلث متساوي الساقين)

س$_2$ = ص + ع (زاوية خارجية للمثلث أ ب د)

$\therefore$ س$_2$ $>$ ص

بما أنّ س$_1$ = س$_2$

$\therefore$ س$_1$ $>$ ص

ولكن ∢ أ ب جـ $>$ س$_1$ (س$_1$ جزء من ∢ أ ب جـ)

$\therefore$ ∢ أ ب جـ $>$ ص

$\therefore$ ∢ أ ب جـ $>$ ∢ ب أ جـ

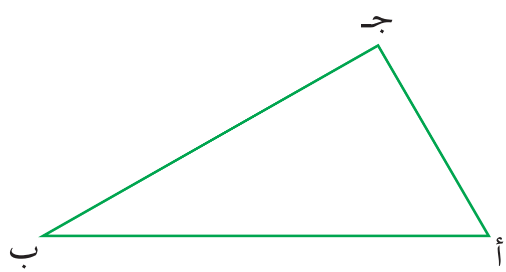
مثـــال (١) :

في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ فيه $\overline{\text{أ ب}} < \overline{\text{ب جـ}} < \overline{\text{جـ أ}}$

برهن أن :

∢ جـ $<$ ∢ أ $<$ ∢ ب



الحـــل:

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}} < \overline{\text{ب جـ}} < \overline{\text{جـ أ}}$

المطلوب إثباته : ∢ جـ $<$ ∢ أ $<$ ∢ ب

البرهان :

في Δ أ ب جـ

أ ب > ب جـ (معطى)

∴ ∠ جـ > ∠ أ (نظرية) (١)

ب جـ > جـ أ (معطى)

∴ ∠ أ > ∠ ب (نظرية) (٢)

من (١) و (٢) ينتج أنّ :

∠ جـ > ∠ أ > ∠ ب

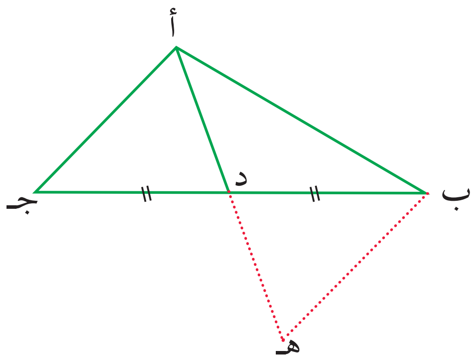
مثـــال (٢) :

في Δ أ ب جـ فيه د منتصف ب جـ

إذا كان أ ب > أ جـ

اثبت أنّ :

∠ ب أ د < ∠ د أ جـ



الحـــل:

المعطيات : في Δ أ ب جـ ، أ ب > أ جـ ، ب د = د جـ

المطلوب اثباته :

∠ ب أ د < ∠ د أ جـ

العمل : مد أ د إلى هـ حيث أ د = د هـ ، صل ب هـ

البرهان :

في Δ ب هـ د ، Δ جـ أ د

ب د = د جـ (معطى)

أ د = د هـ (بالعمل)

∠ ب د هـ = ∠ أ د جـ (تقابل بالرأس)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ض)

∴ ∠ ب هـ د = ∠ د أ جـ

ب هـ = أ جـ

أ ب > أ جـ (معطى)

∴ أ ب > ب هـ

في Δ أ ب هـ ، ∠ ب هـ أ > ∠ ب أ هـ (نظرية)

ولكن ∠ ب هـ د = ∠ د أ جـ (بالبرهان)

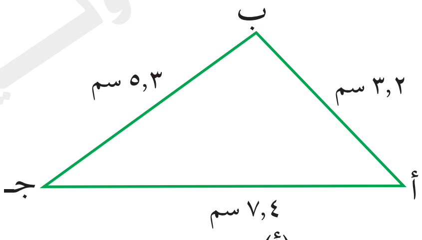
∴ ∠ د أ جـ > ∠ ب أ هـ

∴ ∠ ب أ هـ > ∠ د أ جـ

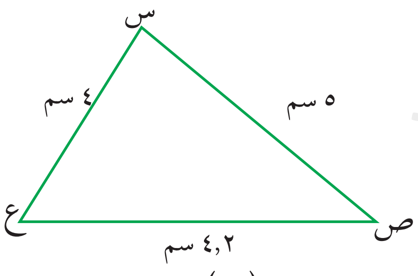
∴ ∠ ب أ د > ∠ د أ جـ

تمرين (١)

١) رتّب زوايا المثلثات التالية تصاعدياً :

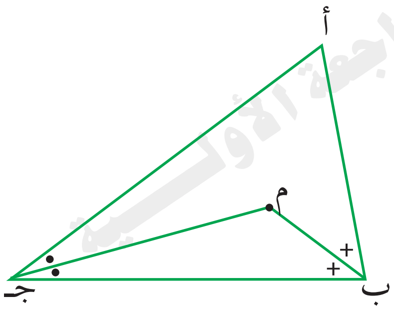


(أ)



(ب)

٢) في الشكل المقابل :



∆ أ ب جـ فيه $\overline{\text{م ب}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

$\overline{\text{م جـ}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

فإذا كان $\overline{\text{م جـ}}$ > $\overline{\text{م ب}}$

برهن أنّ :

∠أ ب جـ < ∠ أ جـ ب

٣) أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ < $\overline{\text{أ ب}}$. برهن أنّ∠ أ < ∠ جـ

٤) أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ أكبر الأضلاع طولاً ، $\overline{\text{جـ د}}$ أصغر الأضلاع طولاً .

برهن أنّ : ∠ ب جـ د < ∠ ب أ د

(٦-٢) نظرية (٢)

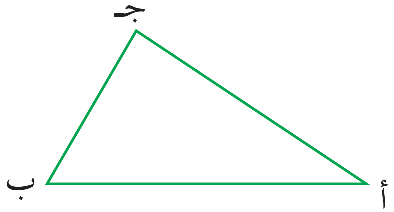
نشاط (٢) :

١) ارسم Δ أ ب جـ الذي فيه ∠ ب > ∠ أ

٢) قس طول الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$ الذي يقابل ∠ ب .

٣) قس طول الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ الذي يقابل ∠ أ .

٤) قارن بين طولي الضلعين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ أيهما أكبر؟



مما سبق يمكن التوصل للنظرية التالية :

نظرية (٢) :

إذا اختلفت قيمتا زاويتين في مثلث فإن الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأكبر .

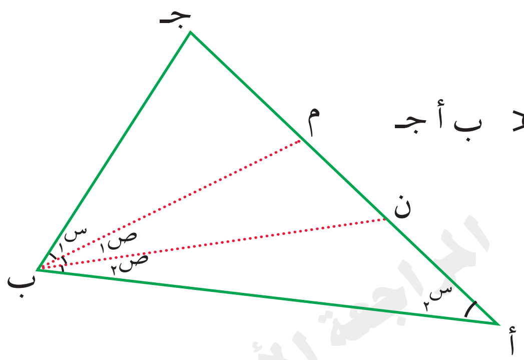
البرهان النظري :

المعطيات :

Δ أ ب جـ الذي فيه ∠ أ ب جـ > ∠ ب أ جـ

المطلوب اثباته :

$\overline{\text{أ جـ}}$ > $\overline{\text{ب جـ}}$



العمل :

١) ارسم $\overline{\text{ب م}}$ ليقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في م حيث ∠ م ب جـ = ∠ ب أ جـ

٢) ارسم منصف ∠ أ ب م ليلاقي $\overline{\text{أ جـ}}$ في ن

البرهان :

$\measuredangle$ جـ ب ن = س$_1$ + ص$_1$

$\measuredangle$ جـ ن ب = س$_2$ + ص$_2$ (زاوية خارجية في Δ أ ب ن)

ولكن س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$ (بالعمل)

$\therefore$ $\measuredangle$ جـ ب ن = $\measuredangle$ جـ ن ب (هما زاويتان متساويتان في Δ جـ ن ب)

$\therefore$ $\overline{\text{جـ ن}}$ = $\overline{\text{جـ ب}}$

ولكن ن نقطة على $\overline{\text{أ جـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ جـ}}$ > $\overline{\text{جـ ن}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ جـ}}$ > $\overline{\text{جـ ب}}$

نتيجة (١) :

الضلع الذي يقابل الزاوية المنفرجة في المثلث المنفرج الزاوية هو أكبر أضلاع المثلث .

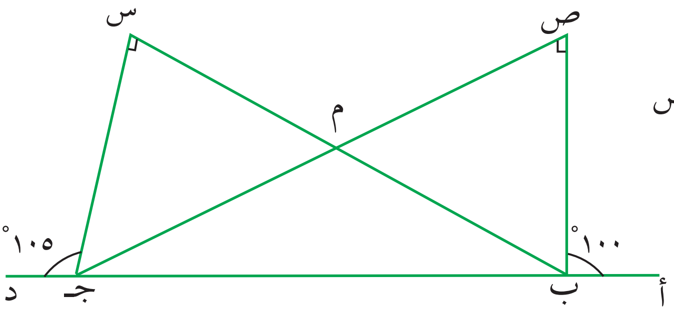
نتيجة (٢) :

الوتر أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية .

برهن النتائج السابقة .

مثـــــال:

في الشكل المقابل



Δ ب جـ س ، Δ ب جـ ص

المعطيات :

∢ س = ∢ ص = ٩٠°

∢ أ ب ص = ١٠٠° ، ∢ د جـ س = ١٠٥°

اثبت أنّ : $\overline{\text{جـ م}}$ < $\overline{\text{ب م}}$

الحـــــل:

∢ أ ب ص (زاوية خارجية للمثلث ب ص جـ)

∴ ١٠٠° = ٩٠° + ∢ ب جـ ص

∴ ∢ ب جـ ص = ١٠٠° − ٩٠° = ١٠°

ولكن ∢ ب جـ ص = ∢ ب جـ م

∴ ∢ ب جـ م = ١٠°

∢ د جـ س (زاوية خارجية للمثلث ب جـ س)

∴ ١٠٥° = ٩٠° + ∢ جـ ب س

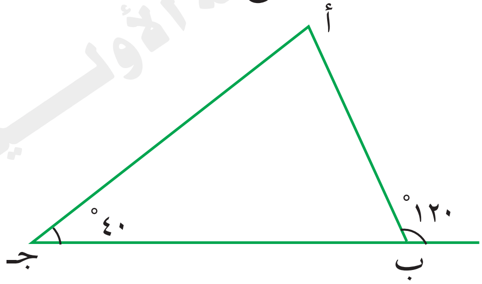
∴ ∢ جـ ب س = ١٠٥° − ٩٠° = ١٥°

ولكن ∢ جـ ب س = ∢ جـ ب م

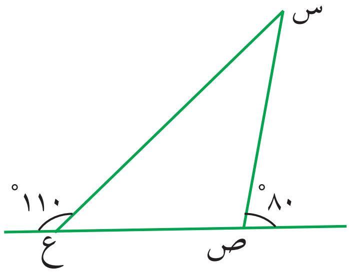
∴ ∢ جـ ب م = ١٥° ، وبما أنّ ∢ جـ ب م > ∢ ب جـ م ، ∴ $\overline{\text{جـ م}}$ < $\overline{\text{ب م}}$

تمرين (٢)

١) رتّب طول أضلاع المثلث أ ب جـ تنازلياً وأضلاع المثلث س ص ع تصاعدياً .



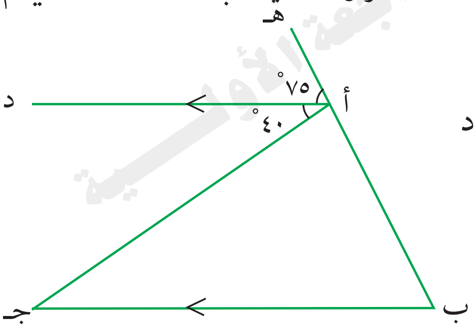
(أ)



(ب)

٢) في Δ أ ب جـ ، $\overline{\text{أ ب}} > \overline{\text{أ جـ}}$ ، إذا كان منصفا الزاويتـــين ب ، جـ يلتقيان في م اثبت أنّ $\overline{\text{م ب}} > \overline{\text{م جـ}}$

٣) في الشكل المقابل Δ أ ب جـ فيه هـ امتداد $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{أ د}} // \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\measuredangle$ جـ أ د = ٤٠° ، $\measuredangle$ د أ هـ = ٧٥° ، برهن أنّ $\overline{\text{أ جـ}} > \overline{\text{أ ب}}$

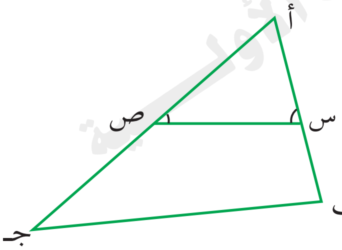


٤) Δ أ ب جـ فيه د نقطة على $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث $\overline{\text{ب د}} = \overline{\text{أ د}}$ ، برهن أنّ $\overline{\text{ب جـ}} > \overline{\text{أ جـ}}$

٥) Δ أ ب جـ فيه $\overline{\text{جـ د}}$ ينصف $\measuredangle$ جـ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في د ، $\overline{\text{د ب}} = \overline{\text{د جـ}}$ ، $\measuredangle$ ب د جـ = ١١٠° اثبت أنّ : $\overline{\text{أ جـ}} > \overline{\text{د ب}}$

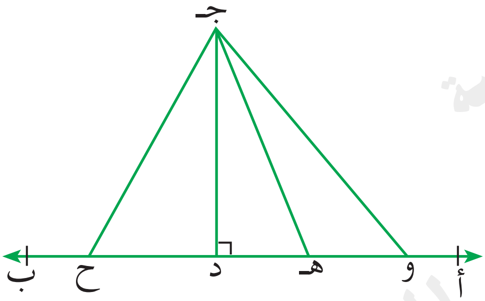
٦) أ ب جـ د ربـــــــاعي فيه $\measuredangle$ ب = $\measuredangle$ د ، $\overline{\text{أ ب}} > \overline{\text{أ د}}$ اثبت أنّ $\overline{\text{جـ د}} > \overline{\text{ب جـ}}$ (ارشاد صلّ $\overline{\text{ب د}}$)

٧) في الشكل المقابل Δ أ ب جـ فيه $\overline{\text{أجـ}} > \overline{\text{أب}}$ س نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص نقطة على $\overline{\text{أ جـ}}$ $\measuredangle$ أ س ص = $\measuredangle$ أ ص س ، أثبت أنّ : $\overline{\text{ص جـ}} > \overline{\text{س ب}}$



(٦–٣) نظرية (٣)

نشاط (٣) :



١) ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٢) حدّد النقطة جـ خارجه

٣) من جـ ارسم القطعة المستقيمة $\overline{\text{جـ د}}$

بحيث يكون $\overline{\text{جـ د}}$ عمودي على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٤) من جـ ارسم عدة قطع مستقيمة $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$ ، $\overline{\text{جـ ح}}$ إلى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٥) قس طول القطع المستقيمة $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$ ، $\overline{\text{جـ ح}}$

٦) قارن بين أطوالها . ما اقصر قطعة مستقيمة ؟

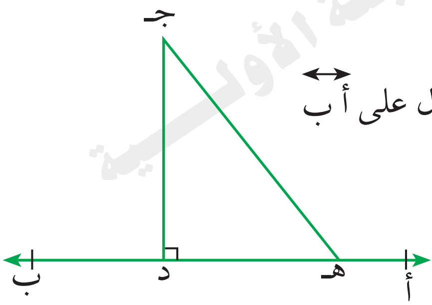
مما سبق يمكن التوصل للنظرية التالية :

نظرية (٣) :

أقصر قطعة مستقيمة من نقطة معينة إلى مستقيم هو العمود النازل من النقطة إلى المستقيم .

البرهان النظري :

المعطيات :



المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، النقطة جـ خارجه $\overline{\text{جـ د}}$ عمود نازل على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

هـ أي نقطة أخرى على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ خلاف د

المطلوب إثباته : $\overline{\text{جـ د}} < \overline{\text{جـ هـ}}$

البرهان :

في Δ هـ د جـ

$\measuredangle$ هـ د جـ = ٩٠° (معطى)

$\measuredangle$ د هـ جـ + $\measuredangle$ د جـ هـ = ٩٠° (مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°)

$\therefore$ $\measuredangle$ د هـ جـ < ٩٠°

$\therefore$ $\measuredangle$ د هـ جـ < $\measuredangle$ هـ د جـ

$\therefore$ $\overline{\text{جـ د}}$ < $\overline{\text{جـ هـ}}$

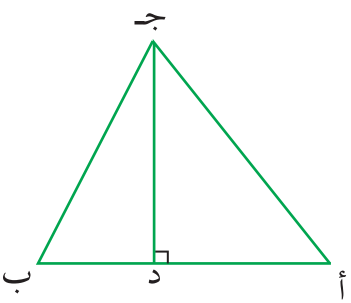
أي أن $\overline{\text{جـ د}}$ أقصر من أي قطعة مستقيمة أخرى من جـ إلى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

مثـــال:

في الشكل المقابل أثبت أنّ :

١) $\overline{\text{جـ د}}$ < $\frac{١}{٢}$ ($\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$)

٢) $\overline{\text{أ ب}}$ < $\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$



الحـــــل:

المعطيات : Δ أ ب جـ ، $\overline{\text{جـ د}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب إثباته :

١) $\overline{\text{جـ د}}$ < $\frac{١}{٢}$ ($\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$)

٢) $\overline{\text{أ ب}}$ < $\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان :

١) في Δ أ د جـ

$\overline{\text{جـ د}} < \overline{\text{أ جـ}}$ (نظرية) (١)

في Δ د ب جـ

$\overline{\text{جـ د}} < \overline{\text{ب جـ}}$ (نظرية) (٢)

بجمع (١) و(٢)

$٢\,\overline{\text{جـ د}} < \overline{\text{أ جـ}} + \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \overline{\text{جـ د}} < \frac{١}{٢}\left(\overline{\text{أ جـ}} + \overline{\text{ب جـ}}\right)$

٢) في Δ أ د جـ

$\overline{\text{أ د}} < \overline{\text{أ جـ}}$ (نتيجة : الوتر أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية) (١)

في Δ د ب جـ

$\overline{\text{د ب}} < \overline{\text{ب جـ}}$ (نتيجة) (٢)

بجمع (١) و(٢)

$\overline{\text{أ د}} + \overline{\text{د ب}} < \overline{\text{أ جـ}} + \overline{\text{ب جـ}}$

ولكن $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{أ د}} + \overline{\text{د ب}}$

$\therefore \overline{\text{أ ب}} < \overline{\text{أ جـ}} + \overline{\text{ب جـ}}$

تمرين (٣)

١) أثبت أنّ مجموع ارتفاعات المثلث أقل من محيطه .

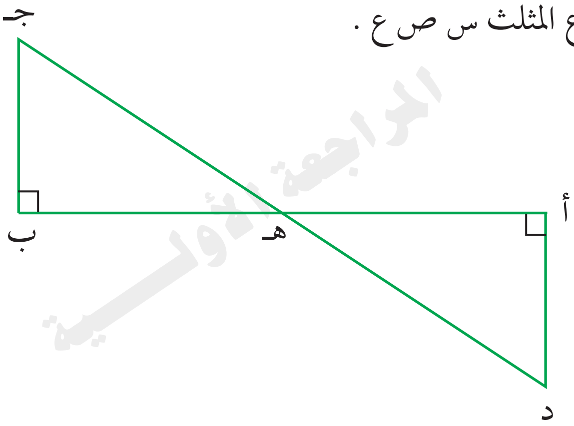
٢) Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، د نقطة على $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث ∡ جـ ب د = ∡ ب أ د
أثبت أنّ $\overline{\text{ب د}}$ أقصر القطع المرسومة من ب إلى $\overline{\text{أ جـ}}$.

٣) Δ س ص ع فيه ∡ س > ∡ ص ، أُسقط عمود من س على $\overline{\text{ص ع}}$ عند ل ،
أثبت أنّ : $\overline{\text{س ل}}$ أصغر من أضلاع المثلث س ص ع .

٤) في الشكل المقابل اثبت أنّ :

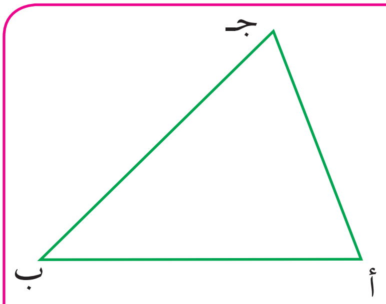
(١) $\overline{\text{أ د}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$ > $\overline{\text{جـ د}}$

(٢) $\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{جـ د}}$



(٦-٤) نظرية (٤)

نشاط (٤) :



١) ارسم Δ أ ب جـ بأطوال مناسبة .

٢) قس طول أ ب ، ب جـ ، جـ د

٣) جد أ ب + ب جـ وقارنه مع أ جـ ماذا تلاحظ؟

٤) جد أ ب + أ جـ وقارنه مع ب جـ ماذا تلاحظ؟

٥) جد أ جـ + ب جـ وقارنه مع أ ب ماذا تلاحظ؟

مما سبق يمكن التوصل للنظرية التالية :

نظرية (٤) :

في أي مثلث مجموع أي ضلعين أكبر من الضلع الثالث

نشاط (٥) :

باستخدام المسطرة والبرجل حاول رسم Δ أ ب جـ في الحالات التالية :

١) أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم

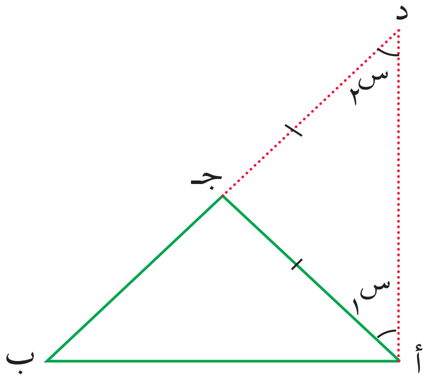
٢) أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٣ سم ، أ جـ = ٢ سم

٣) أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٢ سم ، أ جـ = ٦ سم

٤) أ ب = ٢,٥ سم ، ب جـ = ٣,٧ سم ، أ جـ = ٦,٤ سم

في أي الحالات السابقة امكنك رسم Δ أ ب جـ ولماذا؟

البرهان النظري :



المعطيات :

Δ أ ب جـ

المطلوب إثباته : $\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{جـ ب}}$ > $\overline{\text{أ ب}}$

العمل :

مدّ $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى د حيث $\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{أ جـ}}$ ، صلّ $\overline{\text{أ د}}$

البرهان :

في Δ أ جـ د ، $\overline{\text{أ جـ}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$ (بالعمل)

$\therefore$ س$_1$ = س$_2$ (زاويتا قاعدة في مثلث متساوي الساقين)

بما أن $\measuredangle$ ب أ د > س$_1$

$\therefore$ $\measuredangle$ ب أ د > س$_2$

في Δ أ ب د

$\measuredangle$ ب أ د > $\measuredangle$ أ د ب

$\therefore$ $\overline{\text{د ب}}$ > $\overline{\text{أ ب}}$

ولكن $\overline{\text{د ب}}$ = $\overline{\text{د جـ}}$ + $\overline{\text{جـ ب}}$ = $\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{جـ ب}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{جـ ب}}$ > $\overline{\text{أ ب}}$

وبالمثل يمكن إثبات أنّ : $\overline{\text{أ ب}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$ > $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ + $\overline{\text{أ جـ}}$ > $\overline{\text{ب جـ}}$

وهذا هو الشرط اللازم والضروري لرسم أي مثلث .

نتيجة:

في أي مثلث طول أي ضلع أكبر من الفرق بين طولي الضلعين الآخرين .

أي أنّ في Δ أ ب جـ

$\overline{\text{أ ب}} > \overline{\text{أ جـ}} - \overline{\text{ب جـ}}$

$\overline{\text{أ جـ}} > \overline{\text{أ ب}} - \overline{\text{ب جـ}}$

$\overline{\text{ب جـ}} > \overline{\text{أ جـ}} - \overline{\text{أ ب}}$

مثـــال (١)

أثبت أن نصف محيط أي شكل رباعي أكبر من أي من قطريه

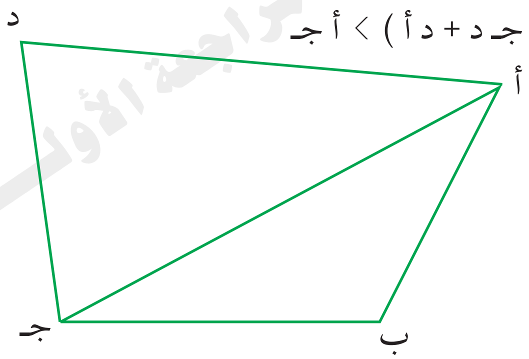
الحــــل:

المعطيات :

أ ب جـ د رباعي فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر

المطلوب إثباته :

$\frac{١}{٢} \left(\overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} + \overline{\text{جـ د}} + \overline{\text{د أ}} \right) > \overline{\text{أ جـ}}$



البرهان :

في Δ أ ب جـ

$\overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} > \overline{\text{أ جـ}}$ (نظرية) (١)

في Δ أ د جـ

$\overline{\text{جـ د}} + \overline{\text{د أ}} > \overline{\text{أ جـ}}$ (نظرية) (٢)

بجمع (١) + (٢)

$\overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} + \overline{\text{جـ د}} + \overline{\text{د أ}} > ٢\ \overline{\text{أ جـ}}$

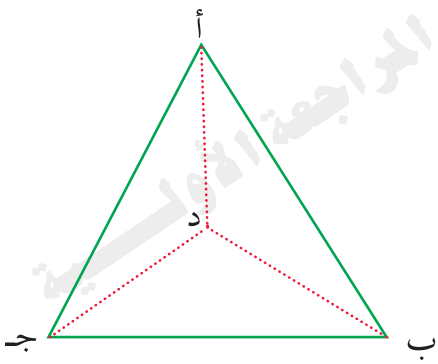
$\therefore \frac{١}{٢} (\overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} + \overline{\text{جـ د}} + \overline{\text{د أ}}) > \overline{\text{أ جـ}}$

مثـــال (٢)

لتكن د نقطة داخل Δ أ ب جـ ، أثبت أنّ :

$٢\ (\overline{\text{أ د}} + \overline{\text{ب د}} + \overline{\text{جـ د}}) > \overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} + \overline{\text{أ جـ}}$

الحـــل:



المعطيات :

Δ أ ب جـ ، النقطة د داخله .

العمل :

صل $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$

البرهان :

في Δ أ ب د : $\overline{\text{أ د}} + \overline{\text{ب د}} > \overline{\text{أ ب}}$ (نظرية) (١)

في Δ أ جـ د : $\overline{\text{أ د}} + \overline{\text{جـ د}} > \overline{\text{جـ أ}}$ (نظرية) (٢)

في Δ ب جـ د : $\overline{\text{ب د}} + \overline{\text{جـ د}} > \overline{\text{ب جـ}}$ (نظرية) (٣)

بجمع (١) و(٢) و(٣) نحصل على :

$٢\,\overline{\text{أ د}} + ٢\,\overline{\text{ب د}} + ٢\,\overline{\text{جـ د}} > \overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} + \overline{\text{جـ أ}}$

∴ $٢\,(\overline{\text{أ د}} + \overline{\text{ب د}} + \overline{\text{جـ د}}) > \overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب جـ}} + \overline{\text{جـ أ}}$

تمرين (٤)

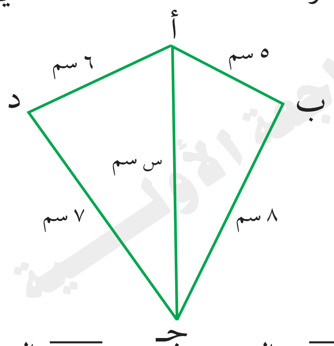
١) هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه :

(أ) ٥ سم ، ٣ سم ، ٢ سم (ب) ٨ سم ، ٢ سم ، ٧ سم

(جـ) ٦,٢ سم ، ٥ سم ، ١١ سم

٢) اثبت أنّ أي ضلع في المثلث أصغر من نصف محيطه .

٣) اكتب مجموعة الأعداد الصحيحة التي تمثّل طول ضلعاً ثالثاً للمثلث الذي طول ضلعاه ٨سم ، ٤ سم .



٤) اكتب قيمة س (عدد صحيح واحد)

يناسب رسم المثلثين Δ أ ب جـ ، Δ أ د جـ

بحيث س > ٩ سم .

٥) Δ س ص ع فيه $\overline{\text{س ص}} = \overline{\text{س ع}}$ ، مد $\overline{\text{س ص}}$ إلى د ، ومد $\overline{\text{س ع}}$ إلى هـ ، ثم صلّ $\overline{\text{د هـ}}$. اثبت أنّ : $\overline{\text{ص د}} < \overline{\text{د هـ}} + \overline{\text{هـ ع}}$

الوحدة السابعة

٧ الأشكال ثلاثية الأبعاد

(المجسمات)

(٧-١) الأشكال ثلاثية الأبعاد (المجسمات) :

لقد سبق أن درسنا الأشكال الهندسية المستوية مثل المثلث ، المربع ، المستطيل والدائرة وغيرها ، ولاحظنا أن جميع هذه الأشكال تُرسم على مستوى واحد مثل سطح الورقة والسبورة وغيرها ولذلك سميت هذه الأشكال مستوية .

هنالك أشكال أخرى يقع عليها بصرنا مثل علبة الكبريت ، حافظة المياه ، الكرة ، مكعب الألعاب ، السيارة ، قطعة الحجر وغيرها .

فهل يمكن أن نسمي أياً منها شكلاً مستوياً ؟ هذا النوع من الأشكال يسمى بالمجسمات .

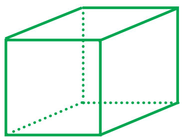
تعريف:

كل ما يشغل حيزاً من الفراغ يسمى مجسم

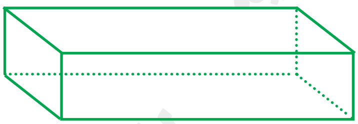
والمجسم أيضاً هو شكل له طول وعرض وعمق (أو ارتفاع)

نلاحظ أن هنالك نوعان من المجسمات :

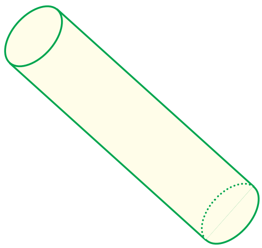
(أ) مجسمات لها شكل هندسي مثل :



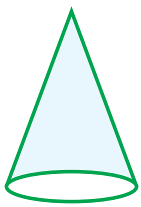
المكعب



متوازي المستطيلات

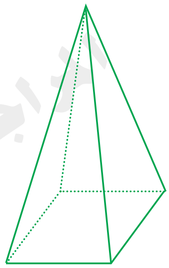


الاسطوانة



المخروط

المنشور الثلاثي



الهرم

الكرة

(ب) مجسمات ليس لها شكل هندسي مثل :

قطعة حجر

كيس خضار

منزل منهار

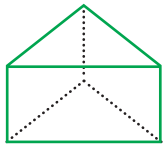
وسوف ندرس في هذه الوحدة المجسمات التي لها شكل هندسي .

(٧–٢) المنشور القائم:

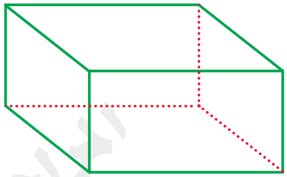
تعريف:

المنشور القائم هو مجسم قاعدتاه مضلعان متوازيان ومتطابقان وكل وجه فيه مستطيل .

توجد عدة أنواع من المنشور القائم ويسمى كل منشور بحسب عدد أضلاع قاعدته ومنها :

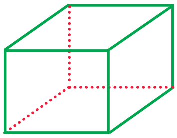


منشور ثلاثي



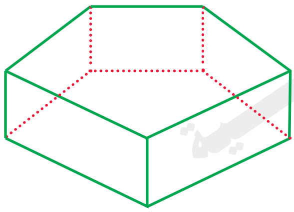
منشور رباعي

(متوازي المستطيلات)



منشورمربع

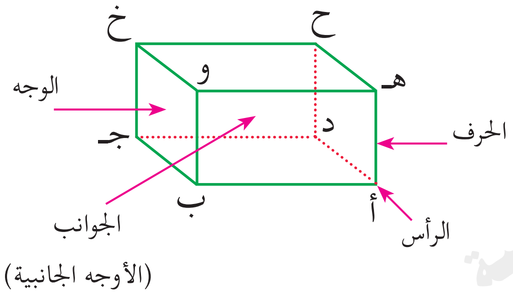
(مكعب)



منشور خماسي

وفي هذه الوحدة سوف نختصر دراستنا على متوازي المستطيلات والمكعب .

متوازي المستطيلات :



هو شكل ثلاثي الأبعاد له ٦ أوجه كل منها مستطيل وكل وجهين متقابلين متساويين في المساحة ومتوازيان .

- النقاط : أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ح ، خ تسمى رؤوس متوازي المستطيلات .
- أ ب و هـ ، ب جـ خ و ، جـ د ح خ ، أ د ح هـ تسمى الأوجه الجانبية لمتوازي المستطيلات . (الوجه سطح مستوٍ)
- الوجهان السفلي والعلوي أ ب جـ د ، هـ و خ ح يسميان قاعدتا متوازي المستطيلات .
- $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ . . . الخ تسمى أحرف متوازي المستطيلات . (الحرف هو المستقيم الناتج عن تقاطع مستويين) اكتب بقية الأحرف .

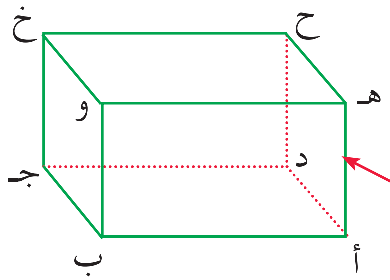
نشاط منزلي (١) :

مستخدماً الكرتون والشريط اللاصق صمم متوازي مستطيلات ثم احضره معك للحصة القادمة .

(٧- ٣) المساحة الجانبية والكلية لمتوازي المستطيلات:

(أ) المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات :

تعرفنا في الدرس السابق أن متوازي المستطيلات له ٦ أوجه كل منها مستطيل وكل وجهين متقابلين متساويين في المساحة ومتوازيين .



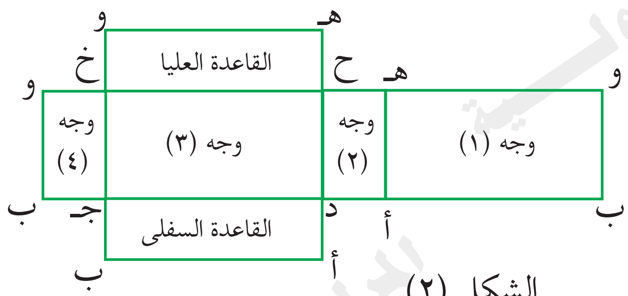
الشكل (١)

تأكد من الشكل الذي قمت بتصميمه

نشاط (١) :

١/ اكتب على متوازي المستطيلات الذي صممته وجه (١) ، وجه (٢) ، وجه (٣) ، وجه (٤) ، القاعدة العليا ، القاعدة السفلى .

٢/ افرد أوجه متوازي المستطيلات لتحصل على الشكل التالي .



الشكل (٢)

لاحظ أنّ :

الأوجه ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ هي الأوجه الجانبية .

وأنّ المساحة الجانبية له هي مجموع تلك الأوجه ،

وهي مستطيلات عمودية على القاعدة ، عرض أي منها = ارتفاع متوازي المستطيلات (ع)

∴ المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات =

$\overline{\text{ب أ}} \times \text{ع} + \overline{\text{أ د}} \times \text{ع} + \overline{\text{د جـ}} \times \text{ع} + \overline{\text{جـ ب}} \times \text{ع} = (\overline{\text{ب أ}} + \overline{\text{أ د}} + \overline{\text{د جـ}} + \overline{\text{جـ ب}}) \times \text{ع}$

حيث ع تمثل ارتفاع متوازي المستطيلات

و $\overline{\text{ب أ}} + \overline{\text{أ د}} + \overline{\text{د جـ}} + \overline{\text{جـ ب}}$ = محيط القاعدة لمتوازي المستطيلات

(انظر إلى الشكل (١))

∴ المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = محيط القاعدة × الارتفاع

(ب) المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات :

من الشكل (٢) نلاحظ أن المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات تتكون من المساحة الجانبية بالإضافة إلى مساحة القاعدتين .

∴ المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = مساحته الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

مثـــال (١):

متوازي مستطيلات طوله ٥ سم وعرضه ٣ سم وارتفاعه ٩ سم جد :

أ) مساحته الجانبية ب) مساحته الكلية

الحـــل:

أ) المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

∴ محيط القاعدة = ٢ × (الطول + العرض) أو الطولين + العرضين

∴ محيط القاعدة = ٢ × (٥ + ٣) = ١٦ سم

المساحة الجانبية = ١٦ × ٩ = ١٤٤ سم^{2}

ب) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

مساحة القاعدتين = ٢ × مساحة القاعدة = ٢ × (٥ × ٣) = ٣٠ سم^{2}

∴ المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = ١٤٤ + ٣٠ = ١٧٤ سم^{2}

مثـــال (٢):

أراد ذو النون طلاء الجدران الجانبية لصالون منزلهم من الداخل بدهان ، فإذا كان الصالون على شكل متوازي مستطيلات وكانت أبعاده هي : طوله ٧متر وعرضه ٥ متر وارتفاعه ٣ متر فإذا كانت تكلفة المتر المربع منه ٧٠٠ جنيه . احسب التكاليف اللازمة للطلاء .

الحـــــل:

المساحة الجانبية لجدران الصالون = محيط القاعدة × الارتفاع

محيط القاعدة = ٢ × (٧ + ٥) = ٢٤ متر

المساحة الجانبية لجدران الصالون = ٢٤ ×٣ = ٧٢ م^{٢}

التكاليف = ٧٢ × ٧٠٠ = ٥٠٤٠٠ جنيه

نشاط منزلي (٢) :

مستخدماً الأدوات المتوفرة في بيئتك المحلية صمم مكعب ثم احضره معك للحصة القادمة .

تمرين (١)

١) متوازي مستطيلات طوله ٩ سم وعرضه ٦ سم وارتفاعه ٨ سم جد مساحته الجانبية ومساحته الكلية .

٢) علبة بدون غطاء طولها ١٥ سم وعرضها ٨ سم وارتفاعها ٢٠ سم احسب كلاً من مساحتها الجانبية ومساحتها الكلية .

٣) متوازي مستطيلات طوله ٨,٥ سم وارتفاعه ٨ سم ومساحته الجانبية ١٦٨ سم^2 جد عرضه ومساحته الكلية .

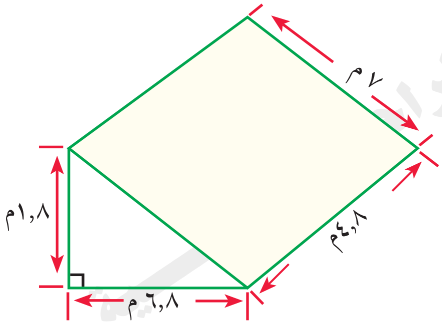
٤) صندوق لسيارة نقل على شكل متوازي مستطيلات ، أبعاده من الداخل ٦ أمتار ، ٣ أمتار وارتفاعه ٢ متر ، يراد طلائه من الداخل بدهان تكلفة المتر المربع ٩٠٠ جنيه ، احسب تكلفة الدهان .

٥) علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدتها على شكل مربع طول ضلعه ٨ سم ، فإذا كان ارتفاع العلبة ١٥ سم احسب كلاً من مساحتها الجانبية ومساحتها الكلية .

٦) حجرة طولها ٥ أمتار وعرضها ٤ أمتار وارتفاعها ٣,٢ متر يراد طلاء جدرانها وسقفها بدهان تكلفة المتر المربع ٨٠٠ جنيه ، احسب التكلفة اللازمة ، علماً بأن جدران الغرفة بها فتحتان (٢ شباك وباب) مساحتها ٨ م^2 .

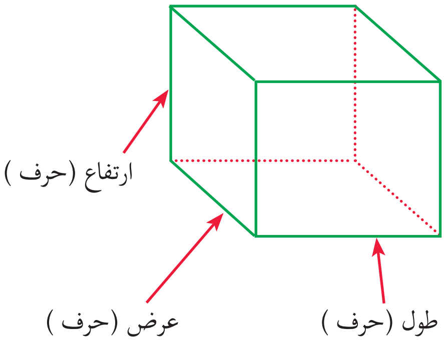
٧) حاوية لنقل البضائع على شكل متوازي مستطيلات ، أبعادها من الداخل ٥,٥ متر ، ٣,٥ متر ، ١,٥ متر ، يراد تغطية جوانبها وسقفها بنوع من الصاج ثمن المتر المربع ١٢٠٠ جنيه احسب ثمن الصاج اللازم لذلك .

٨) مسألة مفتوحة للمناقشة : يُستعمل في منافسات التزلج على الماء منحدر مغطّى بالشمع كما في الشكل المقابل . جد المساحة الجانبية والكلية لسطح المنحدر .



• من المسألة السابقة استنتج قانوناً للمساحة الجانبية والكلية لسطح المنشور الثلاثي .

(٧–٤) المساحة الجانبية والكلية للمكعب



المكعب :

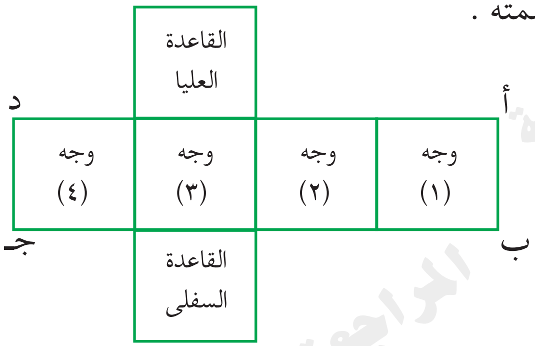
هو شكل ثلاثي الأبعاد يتكون من ٦ أوجه كلها مربعات متطابقة و ١٢ حرفاً متساوياً في الطول و٨ رؤوس .

وهذا يعني أن المكعب حالة خاصة من متوازي المستطيلات عندما يكون (طوله = عرضه = ارتفاعه)

أي أنّ المكعب هو متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة متساوية .

(أ) المساحة الجانبية للمكعب :

نشاط (٢) :



١) استعمل مجسم المكعب الذي صممته .

٢) سمّ الأوجه الجانبية

وجه (١) ، وجه (٢)

وجه (٣) ، وجه (٤)

٣) سمّ القاعدة العليا والقاعدة السفلى .

٤) أفرد المكعب لتحصل على الشكل أعلاه .

لاحظ أنّ : الأوجه (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) هي الأوجه الجانبية وأنّ المساحة الجانبية هي مجموع تلك الأوجه .

∴ المساحة الجانبية للمكعب = مساحة الوجه الواحد × ٤

بطريقة أخرى :

لاحظ أن : حين تم فرد أوجه المكعب نتج المستطيل أ ب جـ د المكوّن من الأوجه الجانبية .

طول المستطيل = مجموع أطوال أحرف الأوجه الأربعة (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) التي تُمثّل (محيط قاعدة المكعب)

عرض المستطيل = طول الحرف $\overline{\text{أ ب}}$ الذي يمثّل (ارتفاع المكعب)

∴ المساحة الجانبية للمكعب = محيط القاعدة × الارتفاع

(ب) المساحة الكلية للمكعب :

لحساب المساحة الكلية للمكعب نلاحظ أنّ المكعب يتكون من المساحة الجانبية بالإضافة إلى مساحة القاعدتين العليا والسفلى .

أي أنّ : المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

= مساحة الوجه الواحد × ٤ + ٢ × مساحة القاعدة

وبما أنّ :

المكعب فيه القاعدة هي مربع مطابق للوجه الجانبي

∴ المساحة الكلية للمكعب = مساحة الوجه الواحد × ٦

مثـــال (١):

مكعب طول حرفه ٥ سم جد : أ) مساحته الجانبية ب) مساحته الكلية

الحـــل:

(أ) المساحة الجانبية للمكعب = ٤ × مساحة الوجه الواحد

مساحة الوجه الواحد = ٥ × ٥ = ٢٥ سم^{٢}

المساحة الجانبية = ٤ × ٢٥ = ١٠٠ سم^{٢}

(ب) المساحة الكلية للمكعب = ٦ × مساحة الوجه الواحد

= ٦ × ٢٥ = ١٥٠ سم^{٢}

مثـــال (٢):

مكعب مساحته الجانبية ١٩٦ سم^{٢} جد :

أ) مساحة الوجه الواحد ب) عرض القاعدة جـ) مساحته الكلية

الحـــل:

(أ) المساحة الجانبية للمكعب = ٤ × مساحة الوجه الواحد

١٩٦ = ٤ × مساحة الوجه الواحد

∴ مساحة الوجه الواحد = $\frac{١٩٦}{٤}$ = ٤٩ سم^{٢}

(ب) مساحة الوجه الواحد = (عرض القاعدة)^{٢}

∴ عرض القاعدة = $\sqrt{\text{مساحة الوجه الواحد}}$ = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ سم

جـ) المساحة الكلية للمكعب = ٦ × مساحة الوجه الواحد = ٦ × ٤٩ = ٢٩٤ سم^{٢}

مثـــال (٣) :

مكعب أطوال أحرفه = ٧٢ سم جد :

أ) طول حرف المكعب ب) مساحته الجانبية جـ) مساحته الكلية

الحــــــل:

أ) طول حرف المكعب $= \frac{٧٢}{١٢} =$ ٦ سم

ب) مساحة المكعب الجانبية = ٤ × مساحة الوجه

مساحة الوجه = ٦ × ٦ = ٣٦ سم^٢

∴ المساحة الجانبية = ٤ × ٣٦ = ١٤٤ سم^٢

جـ) المساحة الكلية = ٦ × مساحة الوجه = ٦ × ٣٦ = ٢١٦ سم^٢

نشاط منزلي (٣) :

مستخدماً الأدوات المتوفرة في بيئتك المحلية صمم اسطوانة ثم احضرها معك للحصة القادمة .

تمرين (٢)

١) مكعب طول حرفه ٤ سم جد مساحته الجانبية والكلية .

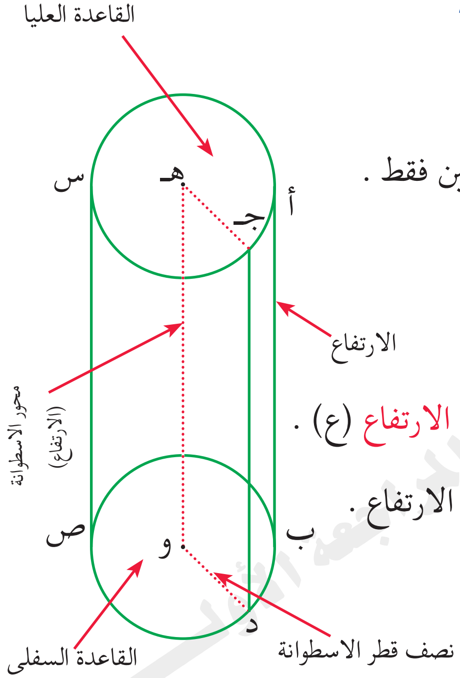
٢) مكعب مساحة قاعدته ٩ سم^٢ جد مساحته الجانبية

٣) مكعب مساحته الجانبية ١٠٠ سم^٢ جد :

أ) طول الحرف ب) عرض القاعدة جـ) المساحة الكلية

٤) مكعب مساحته الكلية ٥٧٠ سم^٢ جد مساحته الجانبية .

(٧–٥) المساحة الجانبية والكلية للاسطوانة



الاسطوانة :

- هي شكل ثلاثي الأبعاد له ارتفاع وقاعدتين فقط .
- القاعدتان عبارة عن دائرتين متطابقتين .
- ليس لها رؤوس أو أحرف .
- هـ و يسمى محور الاسطوانة ويسمى أيضاً الارتفاع (ع) .
- أ ب ، جـ د ، هـ و ، س ص تسمى الارتفاع .
- أ ب = جـ د = س ص = هـ و

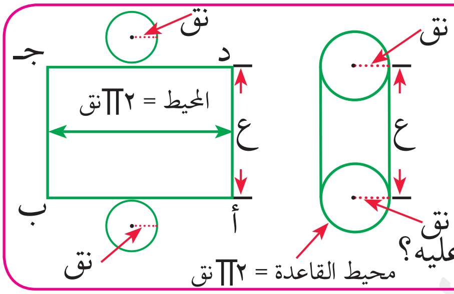
(أ) المساحة الجانبية للاسطوانة :

نشاط (٣) :

١ . استعمل مجسم الاسطوانة الذي صممته .

٢ . سمِّ القاعدة العليا والقاعدة السفلى .

٣ . افرد الاسطوانة . ما الشكل الذي حصلت عليه؟



نلاحظ أنّ :

المساحة الجانبية للاسطوانة تحولت إلى المستطيل أ ب جـ د وبالتالي فإنّ :

المساحة الجانبية للاسطوانة = مساحة المستطيل أ ب جـ د

وبما أنّ مساحة المستطيل = الطول × العرض

∴ المساحة الجانبية للاسطوانة = مساحة المستطيل أ ب جـ د = أ ب × أ د

حيث $\overline{\text{أ ب}}$ يمثّل محيط قاعدة الاسطوانة ، $\overline{\text{أ د}}$ يمثّل الارتفاع (ع)

∴ المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

وينتج عنه :　　　　المساحة الجانبية = ٢ π نق × ع

(ب) المساحة الكلية للاسطوانة :

بما أنّ المساحة الكلية للاسطوانة هي المساحة الجانبية لها بالإضافة إلى مساحة القاعدتين .

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

وبما أنّ مساحة قاعدة الاسطوانة هي دائرة نصف قطرها نق

∴ مساحة القاعدة = π نق^{٢}

∴ المساحة الكلية للاسطوانة = ٢ π نق × ع + ٢ π نق^{٢}

مثــــال: (١) :

اسطوانة نصف قطرها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم جد مساحة سطحها الجانبية والكلية .

الحـــــل:

المساحة الجانبية = ٢ π نق × ع = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ١٠ = ٤٤٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ π نق^{٢} = ٤٤٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢}

= ٧٤٨ سم^{٢}

مثـــال: (٢) :

أراد عبد الله عمل ورقة ملصقة على علبة عصير اسطوانية الشكل . فإذا كان ارتفاع علبة العصير ١٦ سم وطول قطرها ٦ سم . جد مساحة الورقة الملصقة .

الحـــــل:

ع = ١٦ سم ، نق = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم

بما أنّ الورقة الملصقة تغطي السطح الجانبي فقط فإن المطلوب هو إيجاد المساحة الجانبية للعلبة .

∴ المساحة الجانبية = ٢ π نق ع = ٢ × ٣,١٤ × ٣ × ١٦ = ٣٠١,٤٤ سم^{٢}

نشاط منزلي (٤) :

صمم مجسم مخروط واحضره معك إلى الحصة القادمة

تمرين (٣)

١) اسطوانة نصف قطرها ٥ سم وارتفاعها ٩ سم جد مساحة سطحها الجانبية والكلية .

٢) اسطوانة مساحتها الجانبية ١٧٦ سم^{٢} وارتفاعها ٧ سم جد :

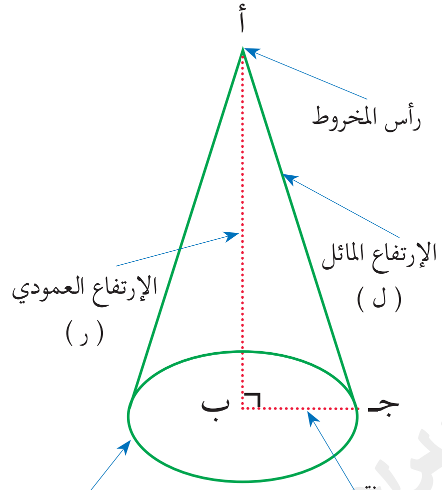
أ . طول نصف قطرها ب . مساحتها الكلية ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

٣) اسطوانتان ارتفاع الأولى ١٤ سم ونصف قطرها ٨ سم ، وارتفاع الثانية ٨ سم ونصف قطرها ١٤ سم أي الاسطوانتين أكبر من حيث المساحة الكلية؟

٤) فرشاة دهان اسطوانية الشكل قطرها ١٠ سم وارتفاعها ٣٠ سم . كم مساحة الجزء الذي تغطيه دورة الفرشاة مرة واحدة من الدهان على الحائط؟

٥) اشترت نون وعاء زهور اسطواني الشكل . فإذا كان طول قطره الداخلي ٨٠ سم وارتفاعه ١٠٠ سم ، وسُمك الوعاء $\frac{١}{٢}$ سم ، وأرادت نون طلاء قاعدة الوعاء وسطحه من الداخل والخارج فكم سنتمتر مربع من الوعاء يجب أن تُطلى؟

(٧–٦) المساحة الجانبية والكلية للمخروط



الشكل (١)

المخروط :

شكل ثلاثي الأبعاد له قاعدة دائرية واحدة

وسطح مقوّس يُصل القـــاعدة بالرأس .

يسمى $\overline{\text{أ ب}}$ الارتفاع العمـــودي (ر)

ويسمى $\overline{\text{أ جـ}}$ الارتفـــاع المائل (ل)

(أ) المساحة الجانبية للمخروط :

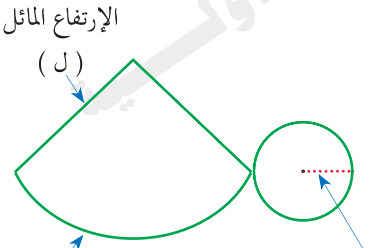
نشاط (٤) :

١) استخدم مجسم المخروط الذي صممته .

٢) افرد المخروط . ما الشكل الذي تحصلت عليه؟

نلاحظ أنّ : المساحة الجانبية للمخروط

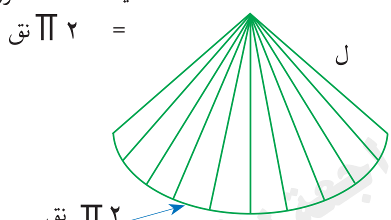
تحولت إلى قطاع دائري الشكل (٢) .



الشكل (٢)

٣) قسّم الشكل الناتج من إفراد المخروط

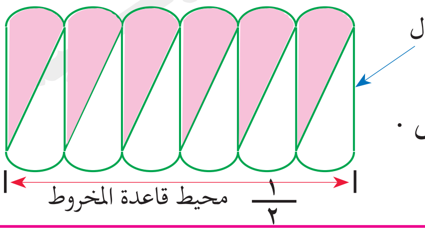
(القطاع الدائري) إلى مثلثات صغيرة متطابقة .



الشكل (٣)

٤) قم بقصها وترتيبها كما في الشكل المقابل .

الشكل (٤)



ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن : الشكل (٤) الناتج يشبه إلى حد كبير المستطيل إذا كان عدد القطع كبير جداً .

∴ المساحة الجانبية للمخروط = مساحة المستطيل الناتج

= الطول × العرض

= ($\frac{١}{٢}$ محيط قاعدة المخروط) × الارتفاع المائل (ل)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ π نق × ل = π نق ل

∴ المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل

(ب) المساحة الكلية للمخروط :

بما أنّ المساحة الكلية للمخروط تتكون من مساحته الجانبية ومساحة قاعدته .

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة المخروط

= المساحة الجانبية + π نق^{٢}

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق ل + π نق^{٢}

مثـــال (١) :

مخروط ارتفاعه المائل ٣ سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم جد مساحة سطحه الجانبية والكلية .

الحـــل:

المساحة الجانبية = π نق ل = ٣,١٤ × ٤ × ٣ = ٣٧,٦٨ سم٢

المساحة الكلية = π نق ل + π نق^{٢} = ٣,١٤ × ٤ × ٣ + ٣,١٤ × (٤)^{٢} = ٨٧,٩٢ سم^{٢}

مثـــال (٢) :

مخروط مساحته الجانبية ١٠٩,٩ سم^{٢} وارتفاعه المائل ٧ سم جد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية .

الحـــــل:

المساحة الجانبية = π نق ل

١٠٩,٩ = ٣,١٤ × نق × ٧

∴ نق = $\frac{١٠٩,٩}{٣,١٤ \times ٧}$ = ٥ سم

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + π نق^{٢}

= ١٠٩,٩ + ٣,١٤ × (٥)^{٢} = ١٨٨,٤ سم^{٢}

نشاط منزلي (٥) :

مستخدماً الكرتون والشريط اللاصق صمم هرماً رباعياً ثم احضره معك إلى الحصة القادمة .

تمرين (٤)

١) مخروط نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه المائل ٨ سم جد مساحة سطحه الجانبي ومساحته الكلية .

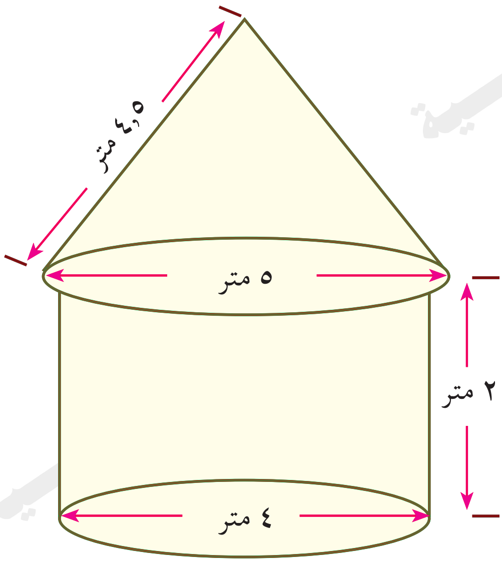
٢) مخروط مساحة سطحه الجانبية ٢١٩,٨ سم^{٢} وطول قطر قاعدته ١٤ سم جد ارتفاعه المائل ومساحته الكلية .

٣) يريد مهرج صناعة قبعة من الورق المقوى طول قطرها ٣٠ سم وارتفاعها المائل ٥٠ سم كم سنتمتر مربع من الورق المقوى يحتاج؟

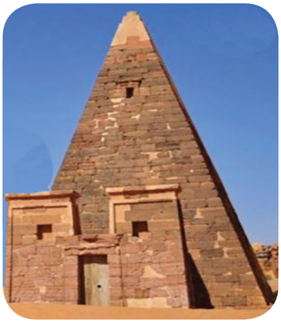
٤) أيّهما له تأثير أكبر في مساحة سطح المخروط الجانبية مضاعفة نصف قطر قاعدته أم مضاعفة ارتفاعه المائل؟ برر إجابتك .

٥) اراد صديق انشاء قطية من البوص كما في الشكل المقابل

ما مساحة البوص الذي يحتاجه؟



(٧-٧) المساحة الجانبية والكلية للهرم

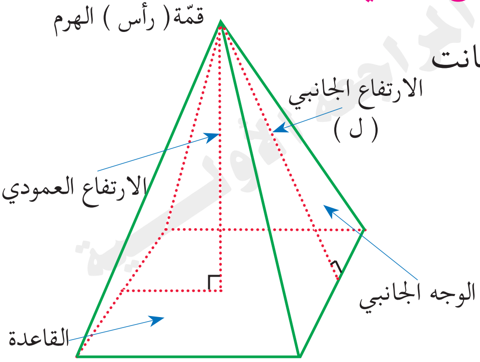


الهرم :

• هو شكل ثلاثي الأبعاد قاعدته على شكل مضلع منتظم وأوجهه الجانبية تتكون من مثلثات متطابقة ومتساوية الساقين تتلاقى رؤوسها في نقطة واحدة تسمى **قمّة الهرم** أو **رأس الهرم** .

• يسمى ارتفاع كل وجه جانبي من المثلثات **الارتفاع الجانبي (ل)** .

• يسمى الهرم بناءً على شكل قاعدته فإذا كانت قاعدته **مثلث** سُمّي الهرم **ثلاثياً** وإذا كانت قاعدته **رباعية** سُمّي الهرم **رباعياً** وهكذا .



(أ) المساحة الجانبية لسطح الهرم :

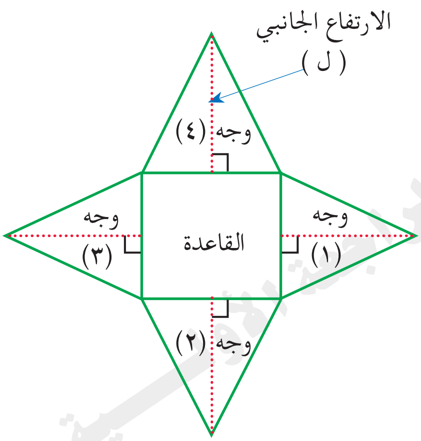
نشاط (٥) :

١) استخدم مجسم الهرم الذي صممته .

٢) على المجسم سمِّ الأوجه الجانبية الوجه (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤)

٣) سمِّ القاعدة .

٤) افرد مجسم الهرم . ماذا تلاحظ؟



نلاحظ أن :

المساحة الجانبية لسطح الهرم الرباعي هي مجموع مساحات أوجهه الجانبية .

∴ المساحة الجانبية للهرم الرباعي =

مساحة الوجه (١) + مساحة الوجه (٢) + مساحة الوجه (٣) + مساحة الوجه (٤)

وبما أنّ الأوجه الجانبية هي مثلثات متطابقة

∴ المساحة الجانبية = ٤ × مساحة الوجه الواحد

وبما أنّ مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ طول ضلع قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبي

∴ المساحة الجانبية للهرم الرباعي = ٤ × ($\frac{١}{٢}$ طول ضلع قاعدة الهرم) × الارتفاع الجانبي

∴ المساحة الجانبية للهرم الرباعي = ٢ طول ضلع قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبي

وبصورة عامة :

المساحة الجانبية للهرم = ٤ × ($\frac{١}{٢}$ طول ضلع قاعدة الهرم) × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ (٤ طول ضلع قاعدة الهرم) × الارتفاع الجانبي

وبما أنّ : محيط القاعدة = ٤ طول ضلع قاعدة الهرم

∴ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

(ب) المساحة الكلية لسطح الهرم :

بما أنّ المساحة الكلية لسطح الهرم هي المساحة الجانبية له مضافاً إليها مساحة القاعدة .

∴ المساحة الكلية لسطح الهرم = المساحة الجانبية للهرم + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ محيط قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبي + مساحة القاعدة

مثـــال (١) :

هرم رباعي ارتفاعه الجانبي ١٨ متر وطول ضلع قاعدته ١٠ متر جد مساحة سطحه الجانبية والكلية .

الحـــــل:

المساحة الجانبية لسطح الهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

محيط القاعدة = ٤ × ١٠ = ٤٠ م

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ × ١٨ = ٣٦٠ م^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

مساحة القاعدة = ١٠ × ١٠ = ١٠٠ م^{٢}

∴ المساحة الكلية = ٣٦٠ + ١٠٠ = ٤٦٠ م^{٢}

مثـــال (٢) :

هرم ثلاثي مساحة سطحه الجانبية ١٢٦ سم^{٢} وارتفاعه الجانبي ١٢ سم جد :

أ) محيط قاعدته   ب) طول ضلع قاعدته

الحـــــل:

(أ) المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

∴ محيط القاعدة = $\frac{\text{٢ × المساحة الجانبية للهرم}}{\text{الارتفاع الجانبي}}$

∴ محيط القاعدة = $\frac{\text{٢ × ١٢٦}}{\text{١٢}}$ = ٢١ سم

(ب) بما أنّ قاعدة الهرم ثلاثية :

∴ محيط القاعدة = ٣ × طول ضلع قاعدته

∴ طول ضلع قاعدته = $\frac{\text{محيط القاعدة}}{\text{٣}}$ = $\frac{٢١}{٣}$ = ٧ سم

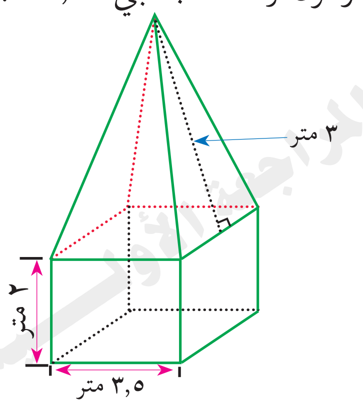
تمرين (٥)

١) هرم رباعي طول ضلع قاعدته ٥ سم وارتفاعه الجانبي ٦ سم جد مساحة سطحه الجانبية والكلية .

٢) سقف من الزنك على شكل هرم طول ارتفاعه الجانبي ٥ متر وقاعدته مربع طول ضلعه ٤ متر . ما مساحة الزنك الذي تحتاج إليه لتغطية السقف؟

٣) هرم رباعي مساحته الجانبية ١٠٧,٢٥ سم^{٢} وطول ارتفاعه الجانبي ٨,٢٥ سم جد طول ضلع قاعدته ومساحته الكلية .

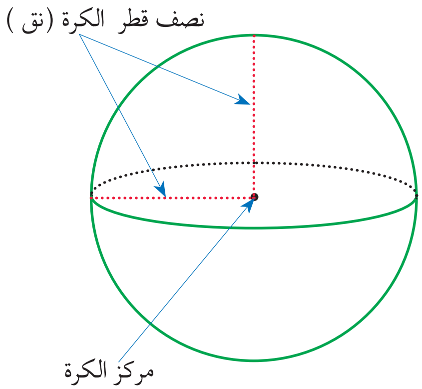
٤) خيمة من القماش أبعادها موضحة في الشكل المقابل كم من الأمتار المربعة نحتاج لصناعتها؟



٥) مسألة مفتوحة : هرم رباعي طول ضلع قاعدته ٣ سم وطول ارتفاعه الجانبي ٤ سم ، فما الأبعاد الممكنة لمتوازي مستطيلات له مساحة سطح الهرم الجانبية نفسها؟

(٧–٨) مساحة سطح الكرة

الكرة :



• هي شكل ثلاثي الأبعاد تبعد جميع النقاط على سطحها المسافة نفسها عن **المركز** .

• تسمى المسافة بين سطح الكرة ومركزها **نصف قطر الكرة** .

• الكرة لا يوجد لها أوجه أو قواعد أو أحرف أو رؤوس .

مساحة سطح الكرة :

مساحة سطح الكرة هي حاصل ضرب ٤ π في مربع نصف قطرها .

∴ مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

حيث نق يمثّل نصف قطر الكرة

مثـــال: (١) :

احسب مساحة سطح كرة نصف قطرها ٦ سم

الحـــل:

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

= ٤ × ٣,١٤ × (٦)^{٢} = ٤٥٢,١٦ سم^{٢}

مثـــال (٢) :

كرة طول قطرها ١٦ سم جد مساحة سطحها .

الحـــل:

نق = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

∴ مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ × ٣,١٤ × (٨)^{٢} = ٨٠٣,٨٤ سم^{٢}

مثـــال (٣) :

كرة مساحة سطحها ٣١٤ سم^{٢} جد طول نصف قطرها .

الحـــل:

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

٣١٤ = ٤ × ٣,١٤ نق^{٢}

∴ نق^{٢} = $\frac{٣١٤}{٤ \times ٣,١٤}$ = ٢٥ ∴ نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

تمرين (٦)

١) احسب مساحة سطح كرة نصف قطرها ٩ سم .

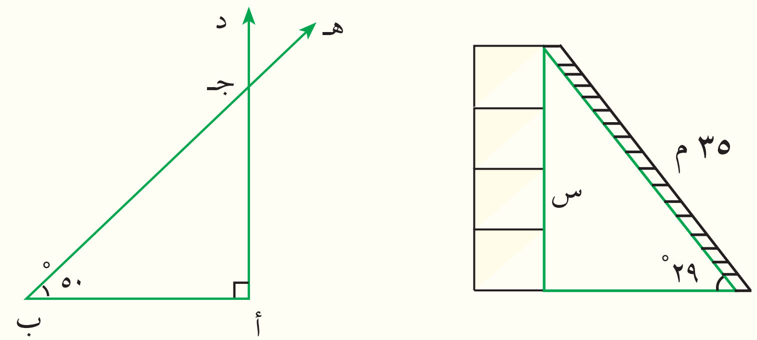
٢) كرة مساحة سطحها ١٠٠ π سم^{٢} جد طول نصف قطرها .

٣) كرة مساحتها السطحية ٧٨,٥٤ سم^{٢} جد طول قطرها .

٤) تضاعف نصف قطر كرة إلى أربعة أضعاف نصف قطرها الأصلي ، فإذا كان نصف قطرها الأصلي ٣ سم فهل ستتضاعف مساحة سطحها أربع مرات؟

الوحدة الثامنة

٨ حساب المثلثات

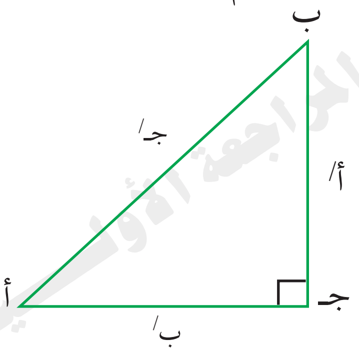


(٨–١) النسب المثلثية

حساب المثلثات هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه . وهو وسيلة غير مباشرة لقياس أجزاء المثلث القائم الزاوية .

الآن أصبح لحساب المثلثات تطبيقات لا علاقة لها بالمثلث ولكن لا تزال المفاهيم الأساسية له تفهم بطريقة جيدة لصلتها بالمثلث القائم الزاوية .

لهذا سوف نبدأ بتناول حساب المثلثات بالمثلث القائم الزاوية .



في الشكل المقابل الحروف أ ، ب ، جـ

ترمز لزوايا المثلث أ ب جـ ، والرموز

أ/ ، ب/ ، جـ/ تمثّل أطوال أضلاع المثلث

المقابلة لزواياه على الترتيب

في المثلث القائم الزاوية أ ب جـ نحن مهتمون بدراسة نسب أطوال أضلاع المثلث .

من المعلوم أنّ الأضلاع الثلاثة أ/ ، ب/ ، جـ/ يمكن استخدامها لتكوين ثلاث نسب هي :

$\frac{أ'}{جـ'}$ ، $\frac{ب'}{جـ'}$ ، $\frac{أ'}{ب'}$ ومقلوباتها الثلاث هي $\frac{جـ'}{أ'}$ ، $\frac{جـ'}{ب'}$ ، $\frac{ب'}{أ'}$

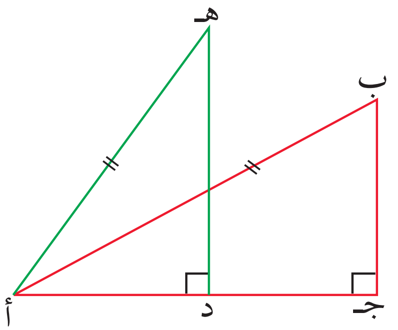
نجد في المثلث المرسوم السابق أنّ النسب الثلاث ومقلوباتها ليست معتمدة على أطوال الأضلاع وإنما هي معتمدة على الزوايا .

فمثلاً :

إذا زادت ∢ جـ أ ب بحيث اصبحت ∢ د أ هـ

فإن الضلع ب جـ يزداد ليصبح هـ د ،

والضلع جـ أ ينقص ليصبح د أ عليه :



فإن النسبة $\frac{\text{أ}^/}{\text{جـ}^/}$ تزداد بينما النسبة $\frac{\text{ب}^/}{\text{جـ}^/}$ تنقص .

لاحظ أنّ : أ ب = أ هـ

وعليه فإن النسب الثلاث نسب للزاوية أ وسميت **النسب المثلثية** وهي النسب التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية . والنسب المثلثية الأكثر شيوعاً هي **الجيب** و**جيب التمام** و**الظل** وتسمى **النسب المثلثية الأساسية** .

جيب الزاوية:

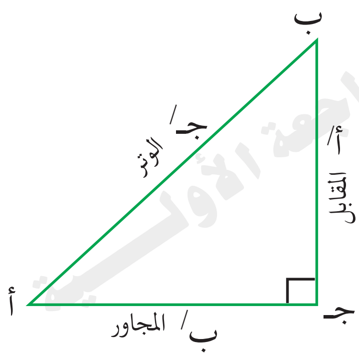
سميت النسبة المثلثية $\frac{\text{أ}^/}{\text{جـ}^/}$ جيب الزاوية أ وتكتب :

جيب أ = $\frac{\text{أ}^/}{\text{جـ}^/}$ وتختصر (**جا أ**) وتقرأ جيب أ ويرمز لها بالانجليزية (sin) وتقرأ (sine)

في الشكل المقابل :

نجد أنّ أضلاع المثلث عادةً ذات صلة

بإحدى الزاويتين الحادتين .



فمثلاً :

الضلع الذي طوله أ/ يسمّى الضلع **المقابل** للزاوية أ

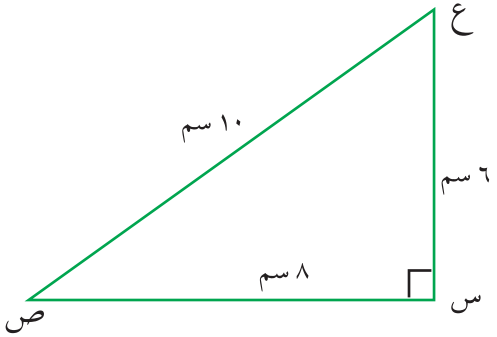
الضلع الذي طوله ب/ يسمّى الضلع **المجاور** للزاوية أ ، الضلع الذي طوله جـ/ يسمّى **الوتر** .

$$\therefore \text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ}/}{\text{جـ}/}$$

مثــــال:

Δ س ص ع قائم الزاوية في س جد :

أ) جا ص   ب) جاع



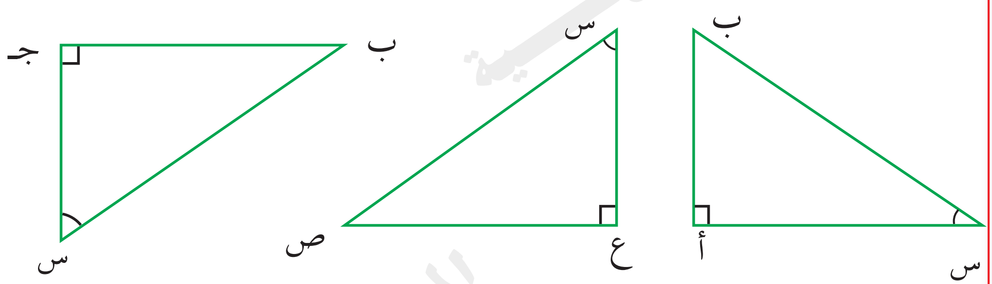
الحـــــل:

$$\text{(أ) جا ص} = \frac{\text{مقابل الزاوية ص}}{\text{الوتر}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{(ب) جاع} = \frac{\text{مقابل الزاوية ع}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$$

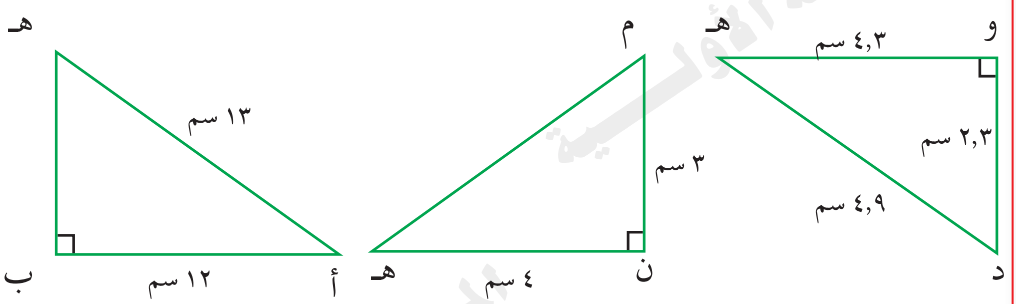
تمرين (١)

١) سمِّ الضلع المقابل والمجاور والوتر بالنسبة للزاوية س في كل من الأشكال الآتية :



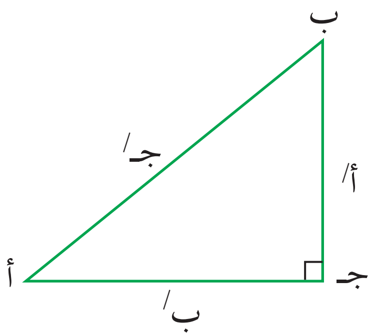
(أ) (ب) (جـ)

٢) جد جا هـ في كل من الأشكال الآتية :



(أ) (ب) (جـ)

(٨–٢) جيب تمام الزاوية



في الشكل المقابل :

تسمى النسبة $\frac{\text{ب}/}{\text{جـ}/}$ جيب تمام الزاوية أ

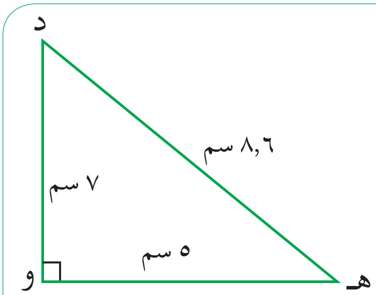
وتكتب جيب تمام أ = $\frac{\text{ب}/}{\text{جـ}/}$ وتختصر (جتا أ)

وتقرأ جيب تمام أ ويرمز لها بالإنجليزية (cos) وتقرأ (cosine)

∴ جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب}/}{\text{جـ}/}$

مثـــال:

مستعيناً بالشكل المقابل جد الآتي :



١) جتا هـ ٢) جتا د ٣) جتا هـ + جتا د

الحـــل:

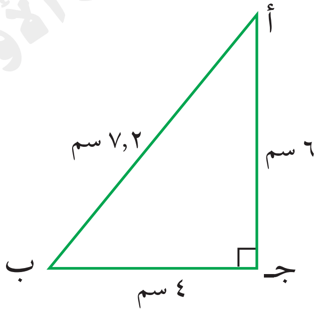
١) جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٥}{٨,٦}$ = ٠,٦

٢) جتا د = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٧}{٨,٦}$ = ٠,٨

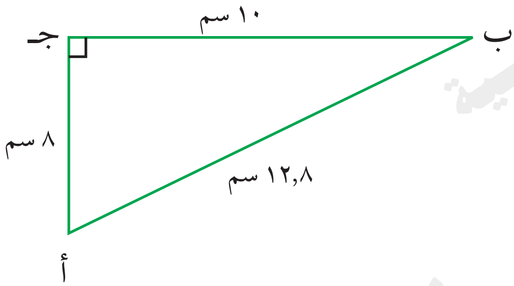
٣) جتا هـ + جتا د = ٠,٦ + ٠,٨ = ١,٤

تمرين (٢)

١) جد جتا أ ، جتا ب في كل من الأشكال التالية :

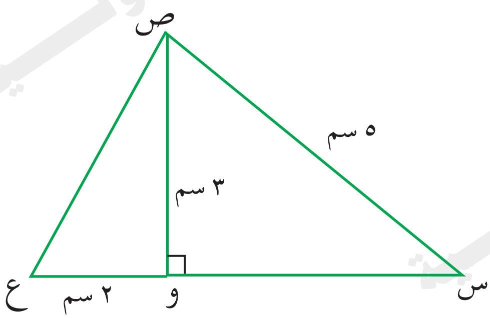


(أ)



(ب)

٢) من الشكل المقابل جد :



(أ) جاس

(ب) جتا س

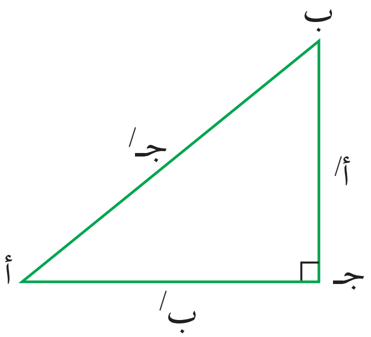
(جـ) جتا ∠ س ص و

(د) جتا ع

(هـ) جتا ∠ و ص ع

(و) جا^2 س + جتا^2 س ماذا تلاحظ من الناتج ؟

(٨–٣) ظل الزاوية



في الشكل المقابل :

لاحظنا سابقاً أنّ :

النسبة $\frac{\text{أ}'}{\text{جـ}'}$ = جا أ

وأنّ النسبة $\frac{\text{ب}'}{\text{جـ}'}$ = جتا أ

والآن النسبة $\frac{\text{أ}'}{\text{ب}'}$ سميت بظل الزاوية أ

وتكتب ظل أ = $\frac{\text{أ}'}{\text{ب}'}$ وتختصر (ظا أ) وتقرأ ظل أ

ويرمز لها بالانجليزية (tan) وتقرأ (tangent)

لاحظ أنّ : أ/ هو مقابل الزاوية أ ، ب/ هو مجاور الزاوية أ .

$$\therefore \text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ}'}{\text{ب}'}$$

لاحظ أنّه : إذا قسمنا جا أ ÷ جتا أ أي أنّ :

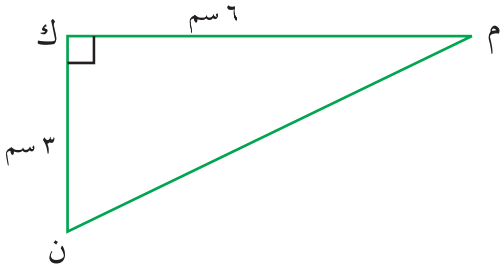
$$\frac{\text{أ}'}{\text{جـ}'} \div \frac{\text{ب}'}{\text{جـ}'} = \frac{\text{أ}'}{\text{جـ}'} \times \frac{\text{جـ}'}{\text{ب}'} = \frac{\text{أ}'}{\text{ب}'}$$

فإننا نحصل على ظا أ

$$\therefore \text{ظا أ} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$$

مثـــال:

من الشكل المقابل جد :



١) ظا م

٢) ظا ن

٣) ظا م × ظا ن

الحـــل:

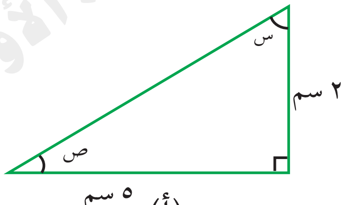
١) ظا م = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

٢) ظا ن = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

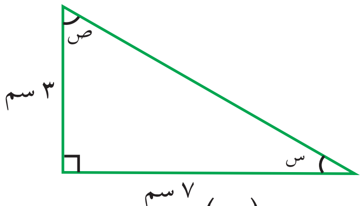
٣) ظا م × ظا ن = $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١

تمرين (٣)

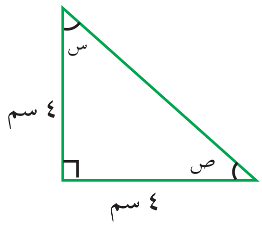
١) في الأشكال التالية جد ظا س ، ظا ص



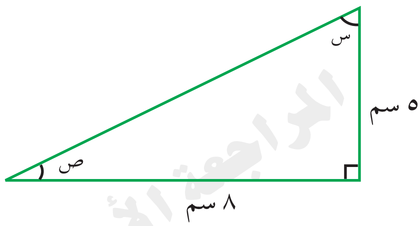
(أ)



(ب)



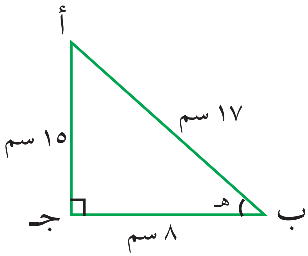
(جـ)



(د)

٢) Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

جد النسب المثلثية الثلاث للزاوية هـ



(٨–٤) استخدام الرسم والقياس لإيجاد الزاوية أو نسبتها المثلثية

أ) ايجاد الزاوية إذا عُلمت نسبتها المثلثية :

إذا كانت هـ احدى زوايا مثلث قائم الزاوية وكان جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$

- كم يساوي طول الضلع المجاور للزاوية هـ ؟
- كم يساوي طول الوتر ؟
- هل يمكنك رسم هذا المثلث ؟

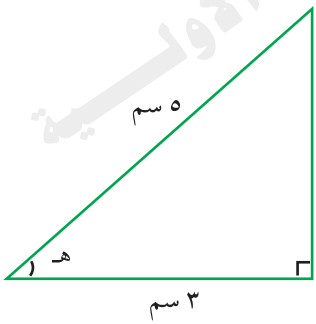
تعلمنا سابقاً كيفية رسم مثلث بمعلومية طول ضلع ووتر وزاوية قائمة .

إذن يمكننا رسم المثلث القائم الزاوية

الذي طول ضلعه = ٣ سم والوتر = ٥ سم

قس الزاوية هـ

إذا كان رسمك دقيقاً ستجد أن $\measuredangle$ هـ = ٥٣°



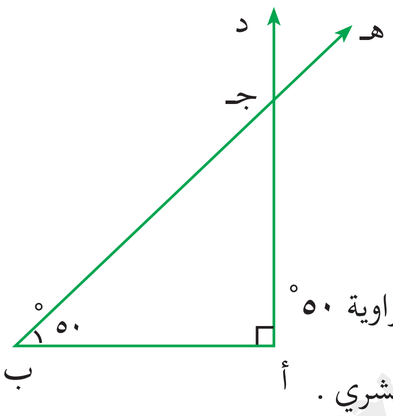
نشاط (١) :

١) بالرسم والقياس جد الزاوية هـ من المثلث القائم الزاوية الذي فيه جا هـ = $\frac{٤}{٧}$

٢) بالرسم والقياس جد الزاوية س من المثلث القائم الزاوية الذي فيه ظا س = $\frac{٥}{٦}$

ب) ايجاد النسب المثلثية للزاوية إذا عُلمت قيمة الزاوية :

نشاط (٢) :



١) ارسم $\overline{\text{أ ب}}$ بطول مناسب

٢) ارسم ∢ أ = ٩٠° ، ∢ ب = ٥٠°

٣) مد الشعاعين $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ حتى يلتقيان في جـ

٤) جد طول الضلع المقابل والمجاور والوتر بالنسبة للزاوية ٥٠°

٥) جد جا ٥٠° ، جتا ٥٠° ، ظا ٥٠° في صورة كسر عشري .

٦) قارن قيم جا ٥٠° ، جتا ٥٠° ، ظا ٥٠° مع اجابات زملائك

إذا كان رسمك دقيقاً **ستجد أنّ** :

جا ٥٠° = ٠,٧٧ تقريباً

جتا ٥٠° = ٠,٦٤ تقريباً

ظا ٥٠° = ١,٢ تقريباً

برأيك لماذا تساوت قيمة جا ٥٠° بينك وبين زملائك بالرغم من اختلاف طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟
وكذلك قيمة جتا ٥٠° ، ظا ٥٠°

تمرين (٤)

١) جد بالرسم والقياس الزاوية التي جيبها = ٠,٨

٢) جد بالرسم والقياس قيمة كل من الزوايا الآتية إذا كان :

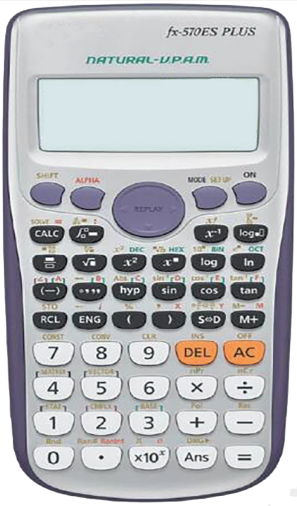
أ) جتا هـ = $\frac{٣}{٧}$ ب) ظا هـ = $\frac{٤}{٦}$

٣) بالرسم والقياس جد جيب وجيب تمام وظل الزوايا الآتية :

أ) ٣٠ ° ب) ٤٥ ° جـ) ٦٠ °

٤) زاوية ظلها ٠,٧٥ فإذا كان المجاور لها = ٨ كم المقابل لها (حوّل ٠,٧٥ إلى كسر عادي) .

(٨–٥) ايجاد قيمة النسبة المثلثية إذا عُلم قياس الزاوية بواسطة الآلة الحاسبة



تعلمنا سابقاً ايجاد النسبة المثلثية للزاوية عن طريق الرسم والقياس وفي هذا الدرس سوف نتعلم كيفية ايجاد النسبة المثلثية عن طريق الآلة الحاسبة .

(تذكّر أنّ جيب الزاوية يرمز له بالإنجليزية sin ، جيب تمام الزاوية يرمز له بالرمز cos ، وظل الزاوية يرمز له بالرمز tan)

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة أو تطبيق الآلة الحاسبة على الهواتف الذكية .

ولمعرفة كيفية استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد النسبة المثلثية للزاوية اتبع الخطوات في المثال التالي :

مثـــال:

جد لأقرب منزلتين عشريتين الآتي :

أ) جا ٤٢ °   ب) جتا ٦٥°   جـ) ظا ٤٥ °

الحــــل:

أ) جا ٤٢ °

جا ٤٢ ° ≃ ٠,٦٧ $= 42$ sin ابدأ (الرمز ≃ يعني تقريباً)

ب) جتا ٦٥ °

جتا ٦٥ ° ≃ ٠,٤٢ $= 65$ cos ابدأ

جـ) ظا ٤٥ °

ظا ٤٥ ° = ١ $= 45$ tan ابدأ

تمرين (٥)

(أ) باستخدام الآلة الحاسبة جد الآتي لأقرب ثلاث منازل عشرية :

١) جا ٣٥ °	٢) جا ٥٠ °	٣) جا ٨٠ °
٤) جتا ٣٠ °	٥) جتا ٦٠ °	٦) جتا ٨٢ °
٧) ظا ٢٣ °	٨) ظا ٧٥ °	٩) ظا ٥٦ °

(ب) اختر زوايا حادة من نفسك وجد لها النسب المثلثية جا ، جتا ، ظا .

(٨–٦) ايجاد قيمة الزاوية إذا عُلمت النسبة المثلثية بواسطة الآلة الحاسبة

لإيجاد قيمة الزاوية بمعلومية نسبتها المثلثية نستخدم دوال اخرى تسمى الدوال المثلثية العكسية وهي :

إذا كانت هـ زاوية حادة وكان :

١) جا هـ = أ فإن معكوس جا هـ هو جا$^{-١}$ أ = هـ وتعني الزاوية التي جيبها أ ويرمز لها بالإنجليزية $\sin^{-1}$

٢) جتا هـ = ب فإن معكوس جتا هـ هو جتا$^{-١}$ ب = هـ وتعني الزاوية التي جيب تمامها ب ويرمز لها بالإنجليزية $\cos^{-1}$

٣) ظا هـ = جـ فإن معكوس ظا هـ هو ظا$^{-١}$ جـ = هـ وتعني الزاوية التي ظلها جـ ويرمز لها بالإنجليزية $\tan^{-1}$

(لاحظ في الآلة الحاسبة رمز الدالة المثلثية العكسية يوجد أسفل زر الدالة)

ولمعرفة كيفية استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة الزاوية اتبع الخطوات في الأمثلة التالية :

مثـــال (١):

إذا كان جا هـ = $\frac{١}{٢}$ جد قيمة الزاوية هـ

الحـــل:

هـ = جا$^{-١}$ $\frac{١}{٢}$ = ٣٠°

ابدأ → SHIFT sin $(1\div2) =$

مثـــال (٢):

إذا كان جتا هـ = ٠,٢ جد قيمة الزاوية هـ (قرِّب لأقرب عدد صحيح)

الحـــــل:

هـ = جتا$^{-1}$ ٠,٢ = ٧٨ °

ابدأ ← SHIFT cos 0. 2 =

مثـــال (٣):

إذا كان ظا س = ٠,٩٤ جد قيمة س (قرِّب لأقرب منزلة عشرية)

الحـــــل:

س = ظا$^{-1}$ ٠,٩٤ = ٤٣,٢ °

ابدأ ← SHIFT tan 0. 94 =

تمرين (٦)

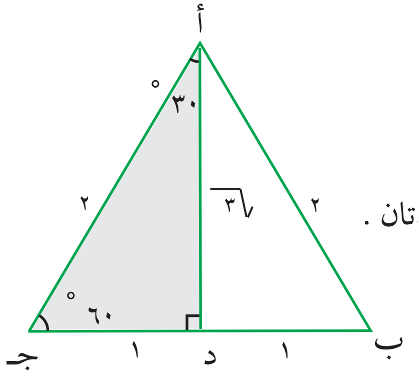
مستخدماً الآلة الحاسبة جد قيمة هـ (قرِّب لأقرب منزلتين عشريتين)

١) جا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ٢) جا هـ = ٠,٧ ٣) جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ٤) جتا هـ = ٠,٥

٥) جتا هـ = $\frac{٦}{٧}$ ٦) جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ٧) ظا هـ = ٠,٨٤٥ ٨) ظا هـ = ٠

٩) ظا هـ = $\frac{٢}{٣}$

(٨–٧) ايجاد النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة بدون استعمال الآلة الحاسبة



(أ) الزاويتان ٣٠° ، ٦٠° :

نشاط (٣) :

١) ارسم مثلثاً متساوي الاضلاع طول ضلعه وحدتان .

٢) ارسم $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$

- كم يساوي طول $\overline{أجـ}$ ؟
- كم يساوي طول $\overline{د جـ}$ ؟
- كم يساوي طول $\overline{أد}$ ؟
- كم تساوي $\measuredangle$ د جـ أ ؟ لماذا ؟
- كم تساوي $\measuredangle$ د أ جـ ؟ لماذا ؟

نلاحظ أنّ :

$\overline{أجـ}$ = ٢ وحدة

$\overline{د جـ}$ = ١ وحدة

$\overline{أد}^{٢} = \overline{أجـ}^{٢} - \overline{د جـ}^{٢}$ = ٤ − ١ = ٣ (نظرية فيثاغورث)

$\therefore$ $\overline{أد}$ = $\sqrt{3}$ وحدة

في Δ أ جـ د نجد أنّ :

$\measuredangle$ د جـ أ = ٦٠° ، $\measuredangle$ د أ جـ = ٣٠°

$\therefore$ جا ٦٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا ٦٠° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2}$

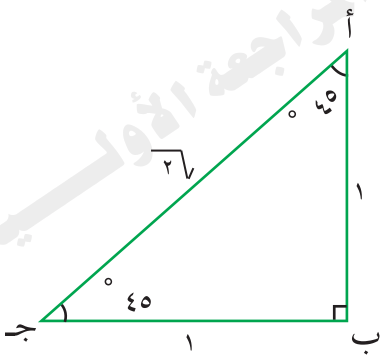
ظا ٦٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{٣}}{١} = \sqrt{٣}$

جا ٣٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

(ب) الزاوية ٤٥° :

ارسم Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب والمتساوي الساقين



افرض أنّ :

$\overline{\text{أ ب}}$ = ١ وحدة

$\overline{\text{ب جـ}}$ = ١ وحدة

كم يساوي طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟

من نظرية فيثاغورث نجد أنّ :

$\overline{\text{أ جـ}}^{٢} = \overline{\text{أ ب}}^{٢} + \overline{\text{ب جـ}}^{٢}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = $(١)^{٢} + (١)^{٢}$ = ٢

$\therefore$ $\overline{\text{أ جـ}} = \sqrt{٢}$

$\measuredangle$ أ = ٤٥° لماذا ؟

$\measuredangle$ جـ = ٤٥° لماذا ؟

$\therefore$ جا ٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٥° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{١}$ = ١

ويمكن عرض النسب المثلثية للزوايا الخاصة في الجدول أدناه :

الزاوية	الجيب جا	جيب التمام جتا	الظل ظا
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١

مثـــال:

جد قيمة الآتي :

١) ٢ ظا ٤٥° − ١

٢) جا ٣٠° + جتا ٦٠°

الحـــل:

١) ٢ ظا ٤٥° − ١ = ٢ × ١ − ١ = ١

٢) جا ٣٠° + جتا ٦٠° = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = ١

تمرين (٧)

جد الأتي :

١) ٢ جتا ٦٠° + ٣ ظا ٤٥°

٢) ٢ جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥°

٣) ٣ جتا ٣٠° − ٢ جا ٦٠°

٤) ٤ جا ٤٥° − ٣ جتا ٤٥°

٥) جتا ٤٥° × جا ٤٥°

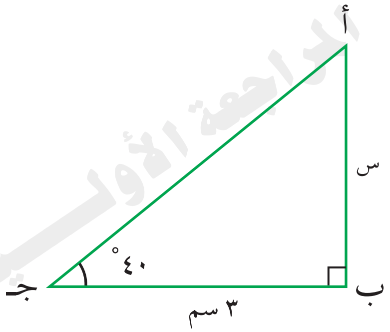
٦) جتا^{2} ٣٠° + جا^{2} ٣٠° ، جتا^{2} ٦٠° + جا^{2} ٦٠° ماذا تُلاحظ ؟

(٨-٨) تطبيقات على النسب المثلثية

مثـــال (١) :

جد طول الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ في Δ أ ب جـ الذي فيه ∡ جـ = ٤٠°، ∡ ب = ٩٠°، $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٣ سم

الحـــــل:



من الشكل المقابل نجد أنّ :

ظا ٤٠° = $\frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{ب جـ}}}$

∴ ظا ٤٠° = $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$

∴ س = ٣ × ظا ٤٠°

∴ س = ٣ × ٠,٨٣٩ = ٢,٥١٧ (مقرّب لثلاث منازل عشرية)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ = ٢,٥١٧ سم

مثـــال (٢) :

يبلغ طول سلم لدى رجال الإطفاء ٣٥ متراً إلى أي ارتفاع يمكن أن تصل قمته على بناية متعددة الطوابق إذا كانت الزاوية المحصورة بينه وبين الأرض ٢٩°

الحـــــل:

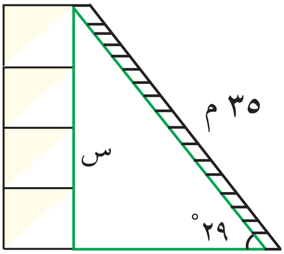
نفرض أنّ الارتفاع = س

∴ جا ٢٩° = $\frac{\text{س}}{٣٥}$

∴ س = ٣٥ × جا ٢٩°

∴ س = ٣٥ × ٠,٤٨ = ١٦,٨

∴ الارتفاع = ١٦,٨ متراً



مثـــــال (٣):

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٩ سم ، ∡ جـ = ٥٠° احسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

الحـــــل:

جا ٥٠° = $\frac{\overline{\text{أ ب}}}{٩}$

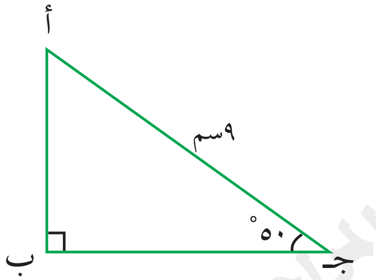
∴ $\overline{\text{أ ب}}$ = ٩ جا ٥٠° = ٩ × ٠,٧٧ = ٦,٩٣

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ = ٦,٩٣ سم

جتا ٥٠° = $\frac{\overline{\text{ب جـ}}}{٩}$

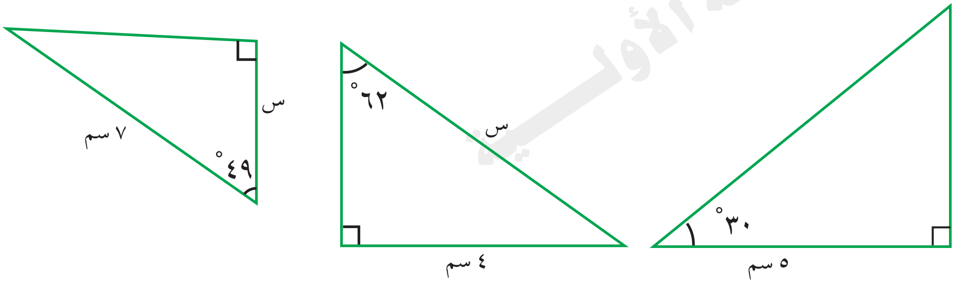
∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٩ × جتا ٥٠° = ٩ × ٠,٦٤ = ٥,٧٦

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٥,٧٦ سم



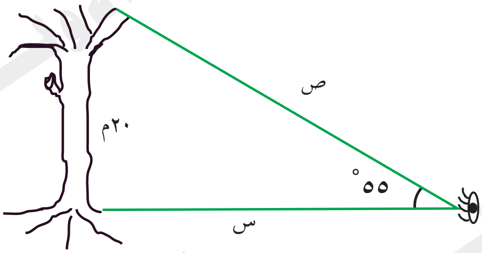
تمرين (٨)

١) جد قيمة س في الأشكال الآتية :



(أ) (ب) (جـ)

٢) يصل ارتفاع شجرة ٢٠ متر ينظر محمد إلى أعلى الشجرة بزاوية ٥٥° فما بعد محمد عن قاعدة الشجرة وما بعده عن قمّتها (افترض أنّ مستوى نظر محمد عند مستوى سطح الأرض)



٣) شجرة طول ظلها عند العصر هو ٥ متر وكانت زاوية رأس الشجرة مع نهاية الظل ٣٦° جد ارتفاع الشجرة .

٤) يضع المدرِّب جهاز التمرين الرياضي مائلاً بمقدار ١٠° فإذا كان طول سطح السير على الجهاز ٢ متر فكم يجب رفع نهايته عن الأرض بالسنتمترات تقريباً .

٥) يقدّر منذر ارتفاع شجرة بنحو ١٧ متر فإذا كان منذر يقف على بعد ٣٠ متر من قاعدة الشجرة فما مقياس الزاوية التي يشكلها مع قمّة الشجرة .

٦) سلّم طوله ٧ أمتار وُضع رأسه الأعلى عند نقطة تبعد متراً واحداً من أقصى ارتفاع للمنزل فوقه مباشرة ورأسه الأسفل يصنع زاوية ٥٦° من الأرض جد ارتفاع المنزل .